PRODUÇÃO ONLINE
REVISTA CIENTÍFICA ELETRÔNICA DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO
ISSN 1676-1901

ANÁLISE E AVALIAÇÃO DO *EQUITY-PREMIUM PUZZLE* NO MERCADO ACIONÁRIO BRASILEIRO USANDO FUNÇÃO DE UTILIDADE RECURSIVA

ANALYSIS AND ASSESSMENT OF THE EQUITY-PREMIUM PUZZLE IN THE BRAZILIAN STOCK MARKET BY USING RECURSIVE UTILITY FUNCTION

Carlos Patricio Samanez* E-mail: cps@puc-rio.br
Robson Cabral dos Santos** E-mail: robson@ctex.eb.br
*Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUC-Rio, Gávea, Rio de Janeiro
**Exército Brasileiro-Centro Tecnológico do Exército (CTEx), Barra de Guaratiba, Rio de Janeiro

Resumo: O *Equity-Premium Puzzle* (EPP) tem sido muito estudado desde a publicação do trabalho de Mehra e Prescott (1985), em que o valor do prêmio de risco no mercado acionário Norte-Americano não pode ser verificado no contexto dos paradigmas de economia e finanças conhecidos. Posteriormente, Weil (1989) usou uma função de utilidade recursiva do tipo Kreps-Porteus, não melhorando os resultados, contudo, chamou a atenção para o que passou a ser conhecido como *Risk-Free-Rate Puzzle* (RFRP). O presente trabalho aplicou o modelo de Weil aos dados do mercado brasileiro no período 1990 – 2005, com o objetivo de fazer uma nova avaliação do EPP para o caso brasileiro usando função de utilidade recursiva. Ao contrário do caso norte-americano, os resultados encontrados foram satisfatórios, ficando constatado que nesse período o modelo que melhor se ajustou ao caso brasileiro foi aquele com utilidade recursiva e processo de dotação Markoviana.

Palavras-chave: Informação e eficiência de mercado. Prêmio de risco. Estrutura acionária.

Abstract: The Equity Premium Puzzle (EPP) has been extensively studied since the Mehra and Prescott's work was published (1985), in which the value of the North American stock market risk-premium cannot be assessed over the known context of the economy and finance paradigms. Later, Weil (1989) used a recursive utility function of Kreps-Porteus type. However the results didn't improve, which called the attention to be known as *Risk-Free-Rate Puzzle* (RFRP). This work it was applied the Weil's model to the Brazilian market data during the period of 1990-2005 in order to make a new assessment of the EPP to the Brazilian case using recursive utility function. In contrast to the North American case, the results were satisfactory, evidencing that in this period the model with better adjusting to the Brazilian case was that one with recursive utility function and Markov Switching allocation process.

Keywords: Information and Market Efficiency. Risk Premium. Capital and Ownership Structure.

1 INTRODUÇÃO

O *Equity-Premium Puzzle* (EPP) foi apresentado originalmente por Mehra e Prescott (1985) como resultado de uma pesquisa que observou que ao longo de quase um século de história o valor do prêmio de risco no mercado acionário norte-americano não podia ser replicado no contexto dos paradigmas de economia e finanças conhecidos.

Partindo do modelo de economia de trocas de Lucas (1978), de uma função de utilidade aditiva e separável no tempo e modelando a dotação como um processo Markoviano, os autores procuraram extrair as esperanças não condicionadas dos retornos dos ativos da economia norte-americana por meio da taxa de crescimento do consumo per capita. Assumiram mercados completos e desconsideraram custos de transação e restrição de liquidez.

O prêmio de risco estimado ficou muito inferior à realidade, levando os autores a concluírem pela inconsistência do prêmio de risco observado, quando comparado às previsões do modelo. Para níveis considerados razoáveis dos parâmetros comportamentais (α-coeficiente de aversão relativa ao risco e β-fator de desconto intertemporal), o modelo foi incapaz de replicar o comportamento histórico da taxa de crescimento do consumo, dos retornos dos ativos e das médias históricas do prêmio de risco.

A sugestão dos autores foi o abandono do modelo sem fricções em favor de outros, considerando as imperfeições de mercado. O artigo estimulou intenso trabalho de pesquisa, buscando explicar e solucionar o problema. A motivação da linha de pesquisa modificando a estrutura tradicional da função utilidade separável no tempo foi consequência do fracasso das análises precedentes em reproduzir o prêmio de risco observado entre 1889 e 1978 com valores aceitáveis do coeficiente de aversão relativa ao risco (α).

O presente estudo busca integrar os conceitos básicos e a informação científica relevante e atualizada, a fim de fornecer subsídios para uma *nova avaliação* do EPP, para o caso brasileiro, utilizando o modelo com utilidade recursiva. Tal avaliação busca encontrar resposta para a seguinte questão: existe ou não o EPP e o Risk-Free Puzzle Invertido (RPFI) no mercado brasileiro quando se utiliza a utilidade recursiva?

Este estudo tem como base o modelo de Weil (1989), que alterou a função utilidade (de utilidade esperada CCRA para utilidade tipo Kreps-Porteus), mas manteve o mesmo processo de dotação (Markoviano) e as demais proposições feitas no trabalho de Mehra e Prescott (1985). O trabalho é utilizado o período de 1990-2005, por compreender o subperíodo de 1994:3-2005:4 que, como demonstrado por Samanez e Santos (2007), apresentou resultados bastante satisfatórios e foi o responsável pela inexistência do EPP no período de 1990-2005.

O presente artigo é composto por sete seções. A seção 1 apresentou a introdução. A seção 2 apresenta na fundamentação teórica a revisão bibliográfica. A seção 3 descreve o modelo com alterações na estrutura de preferência e a seção 4 a composição das séries utilizadas. A seção 5 apresenta os procedimentos metodológicos e a metodologia de cálculo. A seção 6 analisa os resultados e na seção 7 são feitas as conclusões.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Epstein e Zin (1989), motivados pelo fato da função de utilidade esperada tipo CRRA ser muito rígida e restritiva, desenvolveram uma classe de funções com utilidade recursiva. Na função de utilidade esperada tipo CRRA a elasticidade de substituição intertemporal (σ) é igual ao inverso do coeficiente de aversão relativa ao risco $(\sigma = 1/\rho \text{ e } \alpha = \rho)$. A elasticidade de substituição intertemporal está relacionada à disposição do indivíduo de substituir consumo entre períodos e o coeficiente de aversão relativa ao risco à substituição de consumo entre estados da natureza em um mesmo período. O indivíduo avesso à variação no consumo em diferentes estados da natureza também seria avesso a variações de consumo ao longo do tempo.

Assim como Epstein e Zin (1989), Weil (1989) separou a relação entre a aversão ao risco e a elasticidade de substituição intertemporal, imposta pela estrutura de preferências tradicional, usando uma generalização da função utilidade e mantendo o processo de dotação igual ao utilizado por Mehra e Prescott (1985). Contudo, não conseguiu melhorar os resultados utilizando os mesmos dados que esses autores, ou seja, não conseguiu reproduzir o primeiro momento dos retornos dos ativos com e sem risco. O autor chamou atenção para outro problema que passou a ser conhecido como *Risk-Fre-Rate Puzzle* (RFRP) e concluiu que, mesmo com graus elevados de aversão ao risco, não é possível, com preferências separáveis no tempo (utilidade recursiva), explicar, simultaneamente, o grande prêmio de risco e o baixo retorno dos ativos livre de risco para o caso norte-americano.

Issler e Piqueira (2000) analisaram o comportamento do consumidor brasileiro frente ao risco e à substituição intertemporal no consumo por meio da estimação de modelos CCAPM (*Comsuption capital asset pricing model*). Para tanto, usaram três tipos de funções utilidade diferentes – utilidade esperada, hábito externo e tipo Kreps-Porteus. Em cada um dos casos, a partir das respectivas equações de Euler para o consumidor representativo, estimaram os parâmetros estruturais pelo método generalizado dos momentos (GMM). Os autores concluíram que este terceiro modelo acomoda adequadamente os dados brasileiros, encontrando um fator de desconto intertemporal anualizado (β) bem próximo de 1, contudo não encontraram evidência de EPP. Segundo esses autores, a não existência do EPP se deve à grande variação do prêmio de risco no mercado acionário brasileiro. Como consequência dessa variabilidade, não se rejeitou a hipótese de que o prêmio de risco do mercado acionário brasileiro seja estatisticamente igual a zero. Concluíram, então, que não há EPP para o Brasil, devido à inexistência de *Equity Premium* neste país.

Bonomo e Domingues (2002), utilizando uma função utilidade aditiva e recursiva e o processo de dotação Markov Switching, desenvolvido por Hamilton (1989), não encontraram o EPP em nenhum dos modelos utilizados, contudo, encontraram um fator de desconto intertemporal (β) anualizado igual a 0,81, valor este considerado muito baixo e encontrado na tentativa de reproduzir as taxas de juros sem risco. Este baixo valor de β fez com que os autores concluíssem pela existência de um Risk-Free Puzzle Invertido (RFPI) no Brasil.

Cysne (2006) usou dados do período 1992:1-2004:2 e dois diferentes métodos (aproximação sob a hipótese de log-normalidade e calibração) para avaliar a existência de um EPP no Brasil. Em contraste com alguns trabalhos prévios da literatura nacional, ele concluiu que o modelo usado por Mehra e Prescott (1985), seja com preferências aditivas ou recursivas, não é capaz de gerar o prêmio de risco observado na economia brasileira, ou seja, existe o EPP e não encontrou o RFPI como Bonomo e Domingues (2002). O autor concluiu, ainda, que o mercado não apresentou RFRP, tal como encontrado por Weil (1989) no caso norte-americano.

Samanez e Santos (2007) analisaram o EPP em diferentes contextos da economia brasileira no período de 1990-2005. As séries temporais foram divididas em dois subperíodos, tendo como divisor o Plano Real (1994). O modelo utilizado pelos autores foi o do agente representativo com utilidade separável no tempo desenvolvido por Mehra e Prescott (1985). Os autores não encontraram EPP quando a série completa foi utilizada, contudo, no primeiro subperíodo foi verificado o Risk-Free Puzzle Invertido (RFPI), também encontrado por Bonomo e Domingues (2002), utilizando função de utilidade recursiva e dotação como um processo Markov Switching.

Considerando que Bonomo e Domingues (2002) não encontraram EPP em nenhum dos modelos estudados, mas encontraram o RFPI quando utilizaram a utilidade recursiva e, tendo em vista que Cysne (2006) encontrou EPP e não encontrou RFPI, o presente trabalho objetiva realizar uma nova avaliação do EPP, para o caso brasileiro, utilizando o modelo com utilidade recursiva. Tal avaliação busca encontrar resposta para a seguinte questão: existe ou não o EPP e o RPFI quando se utiliza a utilidade recursiva? Os resultados encontrados são melhores que os encontrados por Samanez e Santos (2007) e diferente do resultado encontrado por Cysne (2006).

3 MODELO COM UTILIDADE TIPO KREPS PORTEUS

A função utilidade do tipo Kreps-Porteus (1978) é uma generalização da função utilidade esperada de Von Newman e Morgenstern (1953). Esta função foi utilizada por Epstein e Zin (1989) e por Weil (1989). Ela separa a relação entre a aversão ao risco e a elasticidade de substituição intertemporal imposta pela estrutura de preferências tradicional, em que uma é o inverso da outra.

Por meio de uma função agregadora (W[·]) foi feita a combinação do equivalente certo da utilidade futura, representado por □ $_t$ = □ (U_{t+1}□I_t), com o consumo corrente em t, gerando dessa forma a função de utilidade intertemporal é representada pela equação 1:

$$U_t = W(C_t, \mu_t) = W[C_t, \mu(U_{t+1} | I_t)] \quad \rightarrow U_{t+1} = \text{utilidade futura} \tag{1}$$

Weil (1989) parametrizou a função agregadora (W[·]) como uma função de elasticidade de substituição constante (CES). A função de utilidade intertemporal passa a ser representada por equação 2:

$$U_t = \left[(1-\beta) C_t^{1-\rho} + \beta \left(\mathrm{E}_t U_{t+1}^{1-\alpha} \right)^{\frac{1-\rho}{1-\alpha}} \right]^{\frac{1-\alpha}{1-\rho}} \text{ com } \rho \in R^+,\ \alpha \in R^+ \text{ e } 0 < \beta < 1. \tag{2}$$

sendo: α é a aversão relativa ao risco (constante), β é o fator de desconto intertemporal e ρ representa o parâmetro de substituição intertemporal, dado que $\sigma = 1/\rho$ representa a elasticidade de substituição intertemporal que é tratada como constante.

A função utilidade empregada por Mehra e Prescott (1985) pode ser obtida pela transformação monotônica da equação (2), caso em que $\alpha = \sigma$, ou seja, o coeficiente de aversão relativa ao risco é o inverso da elasticidade de substituição intertemporal ($\sigma = 1/\rho$). A suposição do consumo total sendo igual à produção total ou a soma dos dividendos pagos pelos ativos com risco não foi alterada em relação ao modelo de Mehra e Prescott (1985).

A maximização da Eq. equação (2) está sujeita à seguinte restrição orçamentária:

$$w_{t+1} = \mathrm{R}_{t+1}\left(w_t - c_t\right) \tag{3}$$

w_t representa a riqueza inicial em t, $\mathrm{R}_{t+1} = \left(P_{t+1} + D_{t+1}\right)/P_t$ representa o retorno bruto da carteira de mercado e D_{t+1} representa os dividendos.

A maximização de (2) sujeita a (3) resulta nas seguintes N equações de Euler, dada pela equação 4:

$$E_t\left[\beta^{\left(\frac{1-\alpha}{1-\rho}\right)}\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{\frac{\rho(\alpha-1)}{1-\rho}} \mathrm{R}_{t+1}^{\left(\frac{\rho-\alpha}{1-\rho}\right)} \mathrm{R}_{i,\,t+1}^{e}\right] = 1 \qquad i = 1, \ldots, \mathrm{N} \tag{4}$$

C_t é o consumo per capita em *t,* R_{t+1} é o retorno bruto da carteira de mercado, e $\mathrm{R}_{i,\,t+1}^{e}$ pode representar o retorno bruto de qualquer tipo de ativo, como ações, ativo sem risco ou até mesmo o retorno bruto da carteira de mercado. Com a produção na economia igual a Y_t e a taxa de crescimento igual a x_t (sujeita a uma cadeia de Markov), tem-se que:

$Y_{t+1} = x_{t+1} \times Y_t$ sendo $x_{t+1} \in \{\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_n\}$ e $\Pr\left\{x_{t+1} = \lambda_j \middle| x_t = \lambda_i\right\} = \phi_{ij}$

Assume-se que a cadeia de Markov é ergódiga, ou seja, todos os estados são recorrentes e aperiódicos. Os λ_j são todos positivos e $y_0 > 0$. Esta representação modela a influência dos ciclos econômicos na taxa de crescimento do produto.

A cadeia de Markov foi restringida a dois estados, onde:

$$\lambda_1 = 1 + \mu + \delta; \qquad \lambda_2 = 1 + \mu - \delta; \qquad \phi_{11} = \phi_{22} = \phi \quad \text{e} \quad \phi_{12} = \phi_{21} = (1 - \phi)$$

Os parâmetros α e β definem as preferências e os elementos de ϕ_{ij} e λ_{ij} a tecnologia. Os parâmetros μ, ϕ e δ, onde $\delta > 0$ e $0 < \phi < 1$, agora definem a tecnologia. Tal parametrização permite de forma independente variar: a taxa média de crescimento do produto (alterando μ), o consumo (alterando δ) e o coeficiente de autocorrelação de primeira ordem (alterando ϕ).

Como neste modelo o processo de dotação é uni-variado, o retorno bruto da carteira de mercado e o retorno bruto das ações se confundem, então as seguintes equações de retorno, podem ser formuladas:

$$\mathrm{R}_{t+1} = \mathrm{R}^e_{i,t+1} = \frac{P^e_{t+1} + C_{t+1}}{P^e_t} = \frac{P_{t+1} + D_{t+1}}{P_t} \tag{5}$$

Para o ativo sem risco: $$\mathrm{R}^f_i = \left(1/P^f_i\right) - 1 \tag{6}$$

Substituindo $\mathrm{R}^e_{i,t+1}$ por R_{t+1} em (4) tem-se:

$$E_t\left[\beta^{\left(\frac{1-\alpha}{1-\rho}\right)}\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{\frac{\rho(\alpha-1)}{1-\rho}} \mathrm{R}_{t+1}^{\left(\frac{\rho-\alpha}{1-\rho}\right)} \mathrm{R}^e_{i,t+1}\right] = E_t\left[\beta^{\left(\frac{1-\alpha}{1-\rho}\right)}\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{\frac{\rho(\alpha-1)}{1-\rho}} \mathrm{R}_{t+1}^{\left(\frac{1-\alpha}{1-\rho}\right)}\right] = 1 \quad i = 1,\dots,\mathrm{N} \tag{7}$$

O objetivo é encontrar o preço das ações (P^e_t) que pode ser obtido substituindo a Eq. equação (5) na Eq. equação (7), como mostram a equações a seguir:

$$E_t\left[\beta^{\left(\frac{1-\alpha}{1-\rho}\right)}\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{\frac{\rho(\alpha-1)}{1-\rho}} \left(\frac{P^e_{t+1} + C_{t+1}}{P^e_t}\right)^{(1-\alpha/1-\rho)}\right] = 1 \tag{7a}$$

$$\left(P^e_t\right)^{(1-\alpha/1-\rho)} = E_t\left[\beta^{(1-\alpha/1-\rho)}\left(\lambda_j\right)^{\frac{\rho(\alpha-1)}{1-\rho}} \left(P^e_{t+1} + C_{t+1}\right)^{(1-\alpha/1-\rho)}\right] \quad i = 1,\dots,\mathrm{N} \tag{7b}$$

Como o preço das ações (P^e_t) é homogêneo de grau um em *c*, seguindo o modelo de Mehra e Prescott (1985) a equação (7b) pode ser escrita como:

$\left(P^e_t\right)^{(1-\alpha/1-\rho)} = \left(w_i c\right)^{(1-\alpha/1-\rho)}$; ou seja:

$$\left(P_t^e\right)^{(1-\alpha/1-\rho)} = \left(w_i c\right)^{(1-\alpha/1-\rho)} = E_t\left[\beta^{(1-\alpha/1-\rho)}\left(\lambda_j\right)^{\frac{\rho(\alpha-1)}{1-\rho}}\left(P_{t+1}^e + C_{t+1}\right)^{(1-\alpha/1-\rho)}\right] \quad i = 1,\dots,\mathrm{N} \quad (8)$$

onde w_i é uma constante. Igualando a Eq. equação (8) com a Eq. equação (7b) encontra-se:

$$w_i = \beta\left[\sum_{j=1}^{n}\phi_{ij}\lambda_j^{(1-\alpha)}\left(w_j + 1\right)^{(1-\alpha/1-\rho)}\right]^{1-\rho/1-\alpha} \quad i = 1,\dots,\mathrm{N} \quad (9)$$

Este é um sistema com n equações não lineares e n variáveis. A solução não é simples; contudo, considerando apenas dois estados, se w_2 for posto em função de w_1 e efetuar a substituição no sistema, obtém-se uma equação não linear com o w_1 em função de variáveis conhecidas (a derivação da Eq. equação (9) e da Eq. equação (12) consta no Apêndice A).

O retorno dos ativos com risco será:

$$r_{ij}^e = \frac{P^e(\lambda_j c, j) + \lambda_j c - P^e(c,i)}{P^e(c,i)} = \frac{\lambda_j(w_j+1)}{w_i} - 1 \quad (10)$$

Logo, quando o estado corrente é *i*, o retorno esperado é: $\mathrm{R}_i^e = \sum_{j=1}^{n}\phi_{ij} r_{ij}^e$

Eq. (11)

O preço do ativo livre de risco pode ser obtido substituindo a Eq. equação (6) na Eq. equação (4):

$$P_i^f = \beta^{\left(\frac{1-\alpha}{1-\rho}\right)}\sum_{j=1}^{n}\phi_{ij}\lambda_j^{-\alpha}\left(\frac{w_j+1}{w_i}\right)^{\left(\frac{\rho-\alpha}{1-\rho}\right)} \quad (12)$$

O retorno esperado do ativo livre de risco será:

$$\mathrm{R}_i^f = \frac{1}{P_i^f} - 1$$

(13)

Considerando $\pi \in R^n$ como sendo o vetor das probabilidades estacionárias em *i* (tem-se isso, pois a cadeia de Markov em *i* foi suposta ergódiga), então o vetor π é a solução do seguinte sistema de equações:

$$\pi = \phi^T\pi, \qquad \text{sujeito a } \sum_{i=1}^{n}\pi_i = 1 \quad (14)$$

$\phi^T = \{\phi_{ji}\}$ é a matriz transposta de ϕ, que possui como elementos ϕ_{ij}.

Os retornos esperados do ativo com risco e do ativo livre de risco serão respectivamente:

$$\mathrm{R}^e = \sum_{i=1}^{n} \pi_i \mathrm{R}_i^e \quad \text{e} \quad R^f = \sum_{i=1}^{n} \pi_i R_i^f \tag{15}$$

Assim, o prêmio de risco dado pelo modelo é: $\mathrm{R}^e - \mathrm{R}^f$.

4 A BASE DE DADOS UTILIZADA

Como rápida revisão dos dados utilizados por alguns autores brasileiros na composição das séries importantes, pode-se citar Bonomo e Domingues (2002) e Sampaio (1999) que, baseados em Alencar (1999), elaboraram suas séries de consumo utilizando principalmente a produção física mensal de bens de consumo não duráveis e semiduráveis da indústria nacional fornecidas pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Como nestas séries utilizou-se produção industrial ao invés de consumo, foi feito o ajuste proposto por Alencar (1999), no qual se considera que a produção do mês t é consumida em t + 1. Issler e Piqueira (2000), a respeito da consideração da produção industrial como proxy para o consumo de bens de consumo não duráveis, argumentam que a produção industrial é o principal termômetro da situação macroeconômica do país. Como exemplo, os autores citam o caso da redução da produção industrial em 1990:1, que no caso de São Paulo, atingiu a 50% em relação ao mês anterior. Certamente essa redução comprometeria as análises feitas a partir da série de consumo derivada da produção industrial. Uma solução foi apresentada por Ellery (2000), que usou a publicação anual da matriz insumo-produto para expurgar as variações de estoque.

No presente estudo, a frequência dos dados utilizados é trimestral e, no caso do consumo, foi utilizada a série de consumo total disponibilizada pelo IPEA-DATA, no período de 1991/-2005. A escolha dessa metodologia para a série de consumo é baseada em Cysne (2006). Para o ano de 1990, foi utilizado o valor da série de consumo total anual como base para obter a série trimestral no mesmo ano. Para tanto, a taxa de crescimento trimestral do ano de 1991 foi aplicada ao valor anual de 1990.

A série da população residente foi obtida no período de 1991-2005 pelas estimativas populacionais mensais feitas pelo IBGE. Para o ano de 1990, foi utilizado o dado anual divulgado pelo IBGE e a transformação para uma base mensal foi feita considerando a taxa de variação mensal do ano de 1991 como sendo igual à taxa de variação mensal de 1990.

A série nominal mensal de consumo foi deflacionada pelo Índice Nacional de Preços ao Consumidor (INPC), transformada em trimestral e dividida pela série da população, obtendo-se, assim, a série real de consumo per capita.

O procedimento para a obtenção da taxa Selic real e a rentabilidade real da BOVESPA teve como base os dados mensais nominais. Os dados foram deflacionados pelo INPC mensal obtendo-se, assim, as taxas reais mensais. As taxas foram transformadas em fatores mensais e cada fator foi multiplicado, um pelo outro, dentro de em cada trimestre. Dessa maneira, foi encontrado o fator trimestral que serviu de base para a obtenção das taxas acumuladas trimestralmente.

A taxa média nominal mensal da Selic, a taxa média nominal mensal do IBOVESPA e o INPC foram fornecidos pelo IPEA-DATA.

A tabela 1 apresenta as estatísticas, no período 1990-2005, da série de consumo per capita, do IBOVESPA, da Selic e do prêmio de risco.

Tabela 1- Momentos Amostrais das Séries Utilizadas no Período de 1990-2005

	Taxa de Crescimento de Consumo	**IBOVESPA (1)**	**SELIC (2)**	**Prêmio de risco (1)-(2)**
Média	0,0086	0,0720	0,0325	0,0395
Desvio padrão	0,0685	0,27832	0,051074	0,2790
Autocorrelação de 1ª ordem	-0,217	-0,1515	0,4156	-0,1504

5 PROCEDIMENTO METODOLÓGICOS E METODOLOGIA DE CÁLCULO DO MODELO COM UTILIDADE TIPO KREPS-PORTEUS

Quanto à natureza o presente estudo caracteriza-se por ser uma pesquisa do tipo aplicada, por ter o objetivo de gerar conhecimentos para aplicação prática dirigidos à solução de problemas específicos relacionados à avaliação do EPP.

Trata-se de estudo bibliográfico que, para sua consecução, teve por método a leitura exploratória e seletiva do material de pesquisa, bem como sua revisão integrativa, contribuindo para o processo de síntese e análise dos resultados de vários estudos, de forma a consubstanciar um corpo de literatura atualizado e compreensível.

A seleção das fontes de pesquisa foi baseada em publicações de autores de reconhecida importância no meio acadêmico nacional e internacional.

Visando realizar uma nova avaliação do EPP, para o caso brasileiro, utilizando o modelo com utilidade recursiva, o estudo abordou os principais conceitos e modelos relacionados à avaliação do EPP.

O delineamento de pesquisa contemplou as fases de levantamento e seleção da bibliografia, leitura analítica e fichamento das fontes, aplicação do modelo com utilidade recursiva e discussão dos resultados.

Antes de abordar os resultados é necessário explicar como cada parâmetro atua nos mesmos e como w_1 e w_2 foram encontrados. Como α (aversão relativa ao risco) e σ (elasticidade de substituição intertemporal) não mais se relacionam, ou seja, α não é mais igual ao inverso de σ, então é possível tratar os dois parâmetros de forma independente. Sendo assim, decréscimos no α (mantidos β e σ constantes) aumentam o R^e e o R^f e reduzem o prêmio de risco, pois o aumento em R^f é maior que o amento em R^e. Decréscimos em σ (mantidos α e β constantes), ou seja, aumentos em ρ, aumentam o R^f, reduzem o R^e e aumenta o prêmio de risco. Aumentos em β reduzem o R^e, o R^f e o prêmio de risco. Uma observação importante diz respeito à variação do R^e, pois o aumento do R^e proporcionado pela redução do α é maior que o aumento do R^e proporcionado pelo aumento em ρ.

No modelo original de Mehra e Prescott (1985), a equação $w_i = \beta \sum_{j=1}^{n} \phi_{ij} \lambda_j^{(1-\alpha)} (w_j + 1)$ representa um sistema de *n* equações lineares com *n* incógnitas. No trabalho de Weil (1989) a equação (9) representa um sistema com *n* equações não lineares e *n* incógnitas e a solução não é tão simples como no modelo original de Mehra e Prescott (1985). No modelo original, todos os w_2 e w_1 encontrados com a variação em *α e β* utilizados para calcular os retornos dos ativos com e sem risco, são números reais e, no modelo com utilidade recursiva, a variação em *α, β e ρ* na equação (9) pode apresentar o w_1 como um número irracional.

A busca pelos w_1 e w_2 foi feita usando o *software Maple*, que mostrou todos os w_1 possíveis de serem encontrados variando os parâmetros *α, β e ρ* simultaneamente na equação (9). Com todos os w_1 (valores reais) encontrados pela variação simultânea dos parâmetros *α, β e ρ*, pode-se então encontrar w_2. Com os w_1 e w_2 encontrados, a busca pelos retornos do ativo com e sem risco seguiu o procedimento adotado no modelo de Mehra e Prescott (1985).

Como o modelo com utilidade recursiva gira em torno dos parâmetros *α, β e ρ,* neste trabalho foram usados como parâmetros iniciais os parâmetros encontrados nos resultados de Samanez e Santos (2007). Utilizando o modelo original de Mehra e Prescott (1985) os autores analisaram o EPP em diferentes contextos que a economia brasileira foi submetida no período de 1990-2005. Neste estudo foram encontrados resultados mais satisfatórios que os anteriormente encontrados no Brasil. A referida pesquisa encontrou: *α* = 5,118, *β* = 0,9476 a.t (0,806 a.a) e *σ* = 0,195 e tais parâmetros foram usados como ponto de partida para a busca do *α, β e ρ,* que reproduza no modelo com utilidade recursiva o prêmio de risco e os retornos do ativo com e sem risco.

A aplicação dos parâmetros encontrados por Samanez e Santos (2007) na equação (9) resultou em um w_1 com valor real, contudo este valor aplicado ao modelo com utilidade recursiva apresentou R^e = 0,0721, R^f = 0,0552 e prêmio de risco igual a 0,0169. Como os valores verificados na amostra foram de R^e = 0,0720, R^f = 0,0325 e prêmio de risco 0,0395, é necessário reduzir um pouco o R^e, reduzir um pouco mais o R^f e aumentar o prêmio, logo a variação no R^f deve ser maior.

Considerando que a redução do R^e proporcionado pelo aumento do *α* é maior que a redução do R^e proporcionada pela redução em *ρ*, e que aumentos em *β* reduzem o R^e e o R^f, pode-se combinar inicialmente uma redução em *ρ* com o aumento em *β* para encontrar o w_1 que permitirá ao modelo reproduzir o prêmio de risco e os retornos.

A busca dos novos parâmetros foi iniciada pela variação simultânea e incremental de α e β, fazendo o ρ reduzir em 0,002 e o β aumentar em 0,0001. Pode-se observar na tabela 2 o ajuste inicial sendo feito pela redução em ρ, de 5,118 para 5,116; por um aumento insignificante em β, de 0,9476 para 0,9477 e com o α mantido fixo. Após este primeiro ajuste, o valor de R^e foi reproduzido, o R^f teve uma modesta redução para 0,0551 e o prêmio de risco ficou constante.

Tabela 2 - Resultados gerados pela variação dos parâmetros *α, β e ρ*

α	***β***	***Ρ***	R^e	R^f	**Prêmio de risco**	**Parâmetros variados**
5,11	**0,9476**	**5,118**	0,0721	0,0552	0,0169	*α, β e ρ* iniciais
5,11	0,9477	5,116	0,0720	0,0551	0,0169	β e ρ
5,11	0,9576	5,118	0,0611	0,0442	0,0169	β
2,20	0,9877	5,118	0,0477	0,0409	0,0068	*α e β*
4,80	0,9650	5,230	0,0555	0,0391	0,0164	Variação simultânea em *α, β e ρ*
4,80	0,9650	6,000	0,0580	0,0378	0,0202	
4,80	0,9650	6,500	0,0598	0,0370	0,0228	
4,80	0,9650	7,000	0,0617	0,0362	0,0255	
4,80	0,9650	7,500	0,0636	0,0354	0,0282	
4,80	0,9650	8,000	0,0657	0,0346	0,0310	
4,80	0,9650	8,500	0,0678	0,0339	0,0339	
4,80	0,9650	9,000	0,0701	0,0332	0,0368	
4,80	0,9650	9,500	0,0724	0,0326	0,0398	
4,800	**0,9651**	**9,450**	**0,0720**	**0,0325**	**0,0395**	*α, β e ρ* que reproduzem o prêmio e os retornos
4,80	0,9650	9,450	0,0722	0,0326	0,0395	Variação simultânea em *α, β e ρ*
4,80	0,9650	9,400	0,0719	0,0327	0,0392	
4,70	0,9650	8,000	0,0668	0,0362	0,0305	

Nota: R^e e o R^f representam o retorno dos ativos com e sem risco obtido no modelo.

Na busca pela redução do R^f foi feito um pequeno aumento em β (para 0,9576), que foi mais significativo, passando o R^f de 0,0551 para 0,0442, contudo ainda ficou distante do valor 0,0325 verificado na amostra. O prêmio não sofreu alteração e o R^e teve uma grande redução.

Com o objetivo de verificar os valores do prêmio de risco, do R^e e do R^f obtidos pelo modelo com utilidade recursiva, quando os parâmetros α e β estão próximos do considerado ideal na literatura, foi feita uma grande redução em α indo de 5,118 para 2,20 e um grande aumento em β, indo de 0,9576 para 0,9877. Com estes valores de α e β o prêmio e os retornos ainda ficaram longe dos valores verificados na amostra.

A partir de então, foi feita uma variação simultânea nos parâmetros, com o α indo variando de 4,84 a 4,0 (variando em variação de - 0,01), o β indo variando de 0,965 a 0,9659 (variando em variação de - 0,0001) e ρ indo variando de 9,5 a 5,23 (variando em variação de - 0,01), o que resultou em 7.650 valores reais para w_1.

6 RESULTADOS DA APLICAÇÃO DO MODELO COM UTILIDADE TIPO KREPS-PORTEUS

Após a aplicação destes 7.650 valores de w_1 ao modelo, foram reproduzidos o prêmio de risco e os retornos amostrais (com α = 4,80, β = 0,9651 e ρ = 9,45). Como os valores de α e β estão dentro dos nos limites considerados satisfatórios, não surgiu o EPP, nem o RFP encontrado por Weil (1989) e nem o RFPI encontrado por Bonomo e Domingues (2002) e por Samanez e Santos (2007).

A tabela 3 faz uma comparação entre o modelo de Mehra e Prescott (1985) utilizado por Samanez e Santos (2007) e o modelo com utilidade recursiva usado no presente estudo. Fica evidente a melhora no coeficiente de aversão relativa ao risco (α), no fator de desconto intertemporal (β) e na elasticidade de substituição intertemporal (σ).

Tabela 3 - Resultados de α e β e σ = $1/\rho$ gerados pela variação no tipo de utilidade

Utilidade	α	B	σ =1/ρ	Modelo			Amostra		
				R^e	R^f	Prêmio de risco	IBOVESPA (R_a^e)	SELIC (R_a^f)	Prêmio de risco
Kreps-Porteus	4,800	0,868	0,105	0,072	0,0325	0,0395	0,072	0,0325	0,0395
CRRA	5,118	0,806	0,195						

Notas: (1) Com a utilidade tipo CRRA o prêmio de risco e os retornos do ativo com e sem risco do modelo se igualam ao da amostra quando o α = 5,118, β = 0,806 e σ = 0,195;
(2) Com a utilidade recursiva, o prêmio de risco e os retornos do ativo com e sem risco do modelo se igualam ao da amostra quando o α = 4,80, β = 0,868 e σ = 0,105; ou seja , os valores de α, β e σ melhoraram em relação ao encontrado no modelo de Mehra e Prescott (1985). Como os valores de α e β estão dentro de limites satisfatórios, não surgiu o *Equity Premium Puzzle* (EPP).

Comparando o resultado do modelo com utilidade recursiva com o encontrado por Samanez e Santos (2007), houve melhora nos resultados com redução na elasticidade de substituição intertemporal (σ), redução na aversão relativa ao risco (α) e aumento no fator de desconto intertemporal (β). O aumento do fator de desconto intertemporal (que passou de 0,806 a.t. para 0,868 a.t.) representa uma redução na taxa de desconto intertemporal de 24,06% a.a. para 15,2% a.a. Essa taxa de desconto também é mais adequada que a taxa de 45,83% encontrada por Sampaio (1999).

Da análise dos resultados foi verificado que da nova avaliação do EPP utilizando a utilidade recursiva não surgiu nenhum *puzzle* e o modelo se ajustou melhor ao caso brasileiro.

7 CONCLUSÕES

O objetivo principal deste trabalho foi realizar uma nova avaliação do EPP buscando reproduzir o prêmio de risco e os retornos do mercado acionário brasileiro no período 1990-2005, fazendo uso da utilidade recursiva aplicada ao modelo original de Mehra e Prescott (1985). A utilidade esperada CCRA foi alterada para utilidade tipo Kreps-Porteus e a avaliação buscou encontrar resposta para a seguinte questão: Existe ou não o EPP e o RPFI quando se utiliza a utilidade recursiva?

Da aplicação do modelo verificou-se que o prêmio de risco e os retornos do mercado acionário brasileiro no período 1990-2005 foram reproduzidos pelo modelo, ou seja, não surgiu o EPP, assim como em Bonomo e Domingues (2002) e diferente de Cysne (2006). Não foi verificado o RPFI tal como em Cysne (2006) e diferente de Bonomo e Domingues (2002). Verificou-se, também, que a redução na elasticidade de substituição intertemporal (σ), a redução na aversão relativa ao risco (α) e o aumento no fator de desconto intertemporal (β) representam resultados mais satisfatórios que os obtidos por Samanez e Santos (2007) com o modelo original de Mehra e Prescott (1985). O aumento do fator de desconto intertemporal (que passou de 0,806 a.t. para 0,868 a.t.) representa uma redução na taxa de desconto intertemporal de 24,06% a.a. para 15,2% a.a.

Verificou-se ainda que comparado com o modelo original de Mehra e Prescott (1985) aplicado ao mercado brasileiro por Samanez e Santos (2007), o modelo com utilidade recursiva se ajusta melhor ao caso brasileiro no período de 1990 a 2005. Este resultado foi o oposto do encontrado em Cysne (2006) que concluiu, assim como Weil (1989) para o caso Norte-Americano, que o uso da utilidade recursiva não melhora os resultados encontrados com o modelo original.

Outra observação importante é o nível de dificuldade encontrado na aplicação do modelo com utilidade tipo Kreps-Porteus que é maior em relação ao modelo original de Mehra e Prescott (1985), dada à natureza dos sistemas de equações não lineares e à grande quantidade de valores reais para w_1 encontrados na solução da equação (3.9).

A análise feita neste estudo abordou o período completo de 1990-2005. Pode-se sugerir, como tema de pesquisas posteriores, a divisão das séries temporais utilizadas neste trabalho em dois subperíodos.

Dessa forma, pode-se verificar se há melhoras significativas dos parâmetros considerando os diferentes contextos que a economia brasileira foi submetida no período de 1990-2005. As séries temporais podem ser divididas em duas partes, tendo como divisor o Plano Real, como fizeram Samanez e Santos (2007).

REFERÊNCIAS

ALENCAR, A. S. **Teste do CCAPM para o Brasil**. Dissertação (Mestrado)-Departamento de Economia - PUC-Rio. Rio de Janeiro, 1999.

AZEREDO, F. "The equity premium: a deeper puzzle", University of California at Santa Barbara, **Economics Working Paper Series**, 2007

BARBERIS, N; HUANG, M. **The loss aversion**: narrow framing approach to the equity premium puzzle. North-Holland: Handbook of the Equity Risk Premium, 2008, chapter 1.

BONOMO, M. A. C.; DOMINGUES, G. B. Os puzzles invertidos no mercado brasileiro de ativos. In: BONOMO,M. (Ed.). **Finanças aplicadas ao Brasil**. Rio de Janeiro: Fundação Getulio Vargas, 2002. p. 105-120.

CYSNE, R. P. Equity premium puzzle: evidence from braziliam. **Revista Economia Aplicada**, v. 10, n. 2 p. 161-180, abr./jun. 2006.

DOMINGUES, G. B. **Estimando os momentos dos retornos para o brasil com capm intertemporal e função utilidade recursiva**. Dissertação (Mestrado)-Departamento de Economia - PUC-Rio, 2000.

EPSTEIN, L. G.; ZIN, E. S. Substitution, risk aversion, and the temporal behavior of consumption and asset return: a theoretical framework. **Econometrica**, v.57, n.4, p. 937-969, 1989.

ELLERY, R.; GOMES, V.; SACHSIDA, A. Business cycle fluctuation in Brazil**. Revista Brasileira de Economia,** v. 56, n. 2, p. 269-308, 2002.

HAMINTON, J. D. A new approach to the economic analysis of nonstationary time séries and the business cycle. **Econometrica**, 57, p. 357-84, 1989.

LUCAS, R. E. Jr. Asset prices in an exchange economy. **Econometrica,** n.66, p. 1429-1445, 1978.

HARRISSON, G; RUTSTROM, E. Risk aversion in the laboratory. **Reserach in Experimental Economics**, n.12, p. 41–196, 2008.

HAUG, J. Risk Aversion in the large and in the small. **Working Paper**, n. 243, National Centre of Competence in Research Financial Valuation and Risk Management, University of Zurich, Faculty of Economy, Switzerland. 2011.

ISSLER, J. V.; PIQUEIRA, N. S. Estimating relative risk aversion, the discount rate, and the intertemporal elasticity of substitution in consumption for brazil using three types of utility functions. **Brazilian Review Econometrics**, v. 20, n. 2, p. 201-239, 2000.

KREPS, D. M.; PORTEUS, E. L. Temporal resolution of uncertainty and dynamix choice theory. **Econometrica**, v. 46, n.1, p. 185-200, 1978.

LUCAS, R. E. Jr. Asset prices in an exchange economy. **Econometrica**, n. 66, p. 1429-1445, 1978.

MEHRA, R.; PRESCOTT, E. C. The equity premium: a puzzle. **Journal of Monetary Economics**, n. 15, p. 145-161, 1985.

POST, T; VAN DER ASSEM, M; BALTUSSEM, G; THALER, R. Deal or no deal? decision making under risk in a large-payoff game show. **American Economic Review**, v.98, n. 1, p. 3871, mar. 2008.

SAMANEZ, C.P; SANTOS, R. C. Análise e avaliação do equity premium puzzle no mercado acionário brasileiro sob diferentes contextos econômicos. **Revista Brasileira de Economia de Empresas**, v. 7, n. 2, p. 29-41**,** jul./dez. 2007.

SAMPAIO, F. S. **Existe equity premium puzzle no Brasil?**: reproduzindo os momentos dos retornos dos ativos financeiros com modelo intertemporal de equilíbrio. Dissertação (Mestrado)- Departamento de Economia - PUC-Rio. Rio de Janeiro, 1999.

SHEFRIN, H.M, **Beyond greed and fear**: understanding behavioral finance and the Psychology of Investing, Oxford, United Kingdom: Oxford University Press, 1999.

SHEFRIN, H.M, A behavioral approach to asset pricing. Academic Press, 2008.

WEIL, P. The equity premium and the risk-free rate puzzle. **Journal of Monetary Economics,** n. 24, p. 401-421, 1989.

Artigo recebido em 20/03/2011 e aceito para publicação em 28/03/2012.

APÊNDICE: DERIVAÇÃO DAS FÓRMULAS 9 e 12

A.1: DERIVAÇÃO DA FÓRMULA 9

Igualando a Eq.(8) com a Eq. (7b), substituindo P_{t+1}^{e} por $w_j C_{t+1}$, C_{t+1} por $\lambda_j C_t$ e isolando $\left(w_i\right)^{(1-\alpha/1-\rho)}$ tem-se:

$$\left(w_i\right)^{(1-\alpha/1-\rho)} = \frac{\beta^{(1-\alpha/1-\rho)}}{c^{(1-\alpha/1-\rho)}} E_t\left[\left(\lambda_j\right)^{\frac{\rho(\alpha-1)}{1-\rho}} \left(w_j C_{t+1} + C_{t+1}\right)^{(1-\alpha/1-\rho)}\right] \qquad \text{(A.1.1)}$$

Desenvolvendo a equação (A.1.1) chegamos a:

$$\left(w_i\right)^{(1-\alpha/1-\rho)} = \frac{\beta^{(1-\alpha/1-\rho)}}{c^{(1-\alpha/1-\rho)}} E_t\left[\left(\lambda_j\right)^{\frac{\rho(\alpha-1)}{1-\rho}} \left(C_{t+1}\right)^{(1-\alpha/1-\rho)} \left(w_j + 1\right)^{(1-\alpha/1-\rho)}\right] \qquad \text{(A.1.2)}$$

Que pode ser escrita como:

$$\left(w_i\right)^{(1-\alpha/1-\rho)} = \frac{\beta^{(1-\alpha/1-\rho)}}{c^{(1-\alpha/1-\rho)}} E_t\left[\left(\lambda_j\right)^{\frac{\rho(\alpha-1)}{1-\rho}} \left(\lambda_j\right)^{(1-\alpha/1-\rho)} c^{(1-\alpha/1-\rho)} \left(w_j + 1\right)^{(1-\alpha/1-\rho)}\right] \qquad \text{(A.1.2a)}$$

ou

$$\left(w_i\right)^{(1-\alpha/1-\rho)} = \beta^{(1-\alpha/1-\rho)} E_t\left[\left(\lambda_j\right)^{1-\alpha} \left(w_j + 1\right)^{(1-\alpha/1-\rho)}\right]$$

(A.1.2b)

Que após algumas operações resulta em:

$$w_i = \beta\left[\sum_{j=1}^{n} \phi_{ij} \lambda_j^{1-\alpha} \left(w_j + 1\right)^{(1-\alpha/1-\rho)}\right]^{(1-\rho/1-\alpha)}$$ para $i = 1,....,n$ (A1.3) que é a equação (9)

A.2 : DERIVAÇÃO DA FÓRMULA 12

$R^{e}_{i,t+1}$ pode representar o retorno bruto de qualquer tipo de ativo, como ações, ativo sem risco e a carteira de mercado. Pode-se substituir $R^{e}_{i,t+1}$ por P_i^f e R_{t+1} por $\frac{P^e_{t+1}+C_{t+1}}{P^e_t}$ na Eq. (4):

$$E_t\left[\beta^{\left(\frac{1-\alpha}{1-\rho}\right)}\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{\frac{\rho(\alpha-1)}{1-\rho}}\left(\frac{P^e_{t+1}+C_{t+1}}{P^e_t}\right)^{\left(\frac{\rho-\alpha}{1-\rho}\right)}P_i^f\right]=1 \qquad i=1,\ldots,N$$

Realizando algumas substituições e simplificações obtêm-se:

$$P_i^f=\beta^{\left(\frac{1-\alpha}{1-\rho}\right)}E_t\left[\left(\frac{\lambda_J C_t}{C_t}\right)^{\frac{\rho(\alpha-1)}{1-\rho}}\left(\frac{w_j C_{t+1}+C_{t+1}}{w_i C_t}\right)^{\left(\frac{\rho-\alpha}{1-\rho}\right)}\right]=1 \quad i=1,\ldots,N \qquad \text{(A.2.1)}$$

Que pode ser reescrito como:

$$P_i^f=\beta^{\left(\frac{1-\alpha}{1-\rho}\right)}E_t\left[(\lambda_J)^{\left(\frac{\rho-\alpha}{1-\rho}\right)}\left(\frac{\lambda_J C_t}{C_t}\right)^{\frac{\rho(\alpha-1)}{1-\rho}}\left(\frac{w_j+1}{w_i}\right)^{\left(\frac{\rho-\alpha}{1-\rho}\right)}\right] \qquad i=1,\ldots,N \qquad \text{(A.2.1a)}$$

ou

$$P_i^f=\beta^{\left(\frac{1-\alpha}{1-\rho}\right)}E_t\left[\left(\lambda_j\right)^{-\alpha}\left(\frac{w_j+1}{w_i}\right)^{\left(\frac{\rho-\alpha}{1-\rho}\right)}\right] \qquad i=1,\ldots,N \qquad \text{(A.2.1b)}$$

Após a abertura do termo E_t tem-se:

$$P_i^{\,f} = \beta^{\left(\frac{1-\alpha}{1-\rho}\right)} \sum_{j=1}^{n} \phi_{ij} \lambda_j^{\,-\alpha} \left(\frac{w_j + 1}{w_i} \right)^{\left(\frac{\rho-\alpha}{1-\rho}\right)}$$

(A.2.2) que é a equação (12).