PRODUÇÃO ONLINE
REVISTA CIENTÍFICA ELETRÔNICA DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO
ABEPRO
ISSN 1676-1901

UM NOVO MÉTODO HEURÍSTICO PARA A OTIMIZAÇÃO DE MIX DE PRODUÇÃO BASEADO NA TEORIA DAS RESTRIÇÕES E NO PROBLEMA DA MOCHILA

NEW HEURISTIC METHOD FOR THE OPTIMIZATION OF PRODUCT MIX BASED ON THEORY OF CONSTRAINTS AND KNAPSACK PROBLEM

Vinicius Amorim Sobreiro* E-mail: sobreiro@unb.br
Marcelo Seido Nagano** E-mail: drnagano@usp.br
* Universidade de Brasília (UnB), Brasília, DF
** Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, SP

Resumo: A definição do mix de produção proporciona a alocação dos recursos produtivos no processo de manufatura, visando a otimização da utilização dos recursos e do desempenho do sistema produtivo o que, por sua vez, a um nível gerencial, norteia o desempenho da organização. Entretanto, apesar de sua importância, a definição do mix de produção é um problema do tipo NP-Completo, ou seja, de difícil solução. Assim, com o auxílio da Teoria das Restrições - TOC, algumas heurísticas construtivas têm sido apresentadas para fazer frente a esse problema. Nesse sentido, o objetivo neste trabalho é propor uma nova heurística que proporcione melhores soluções quando comparada com a principal heurística apresentada na literatura, a TOC-h de Fredendall e Lea. Para efetuar essa comparação foram realizadas simulações computacionais visando identificar o mix de produção que possibilitasse o maior ganho possível, considerando um bom tempo de processamento e as características dos ambientes produtivos. Como resultado, observou-se que a heurística proposta obteve uma aproximação mais satisfatória quando comparada à TOC-h e uma boa solução quando comparada com a solução ótima o que, em conclusão, evidência a importância da mesma na definição de mix de produção.

Palavras-chave: Heurística. Mix de produção. TOC. Problema da Mochila. Otimização;

Abstract: The definition of the product mix provides the allocation of the productive resources in the manufacture process and the optimization of productive system. However, the definition of the product mix is a problem of the NP-complete, in other words, of difficult solution. Taking this into account, with the aid of the Theory of Constraints - TOC, some constructive heuristics have been presented to help to solve this problem. Thus, the objective in this paper is to propose a new heuristics to provide better solutions when compared with the main heuristics presented in the literature, TOC-h of Fredendall and Lea. To accomplish this comparison, simulations were accomplished with the objective of identifying the production mix with the best throughput, considering CPU time and the characteristics of the productive ambient. The results show that the heuristics proposal was more satisfactory when compared to TOC-h and it shows good solution when compared with the optimum solution. This fact evidence the importance of the heuristics proposal in the definition of product mix.

Keywords: Heuristic. Product Mix. TOC. Knapsack Problem. Optimization.

1 INTRODUÇÃO

Em um problema de definição do mix de produção há uma necessidade de se determinar quais os produtos e suas respectivas quantidades que deverão ser manufaturados com o objetivo de se maximizar o ganho total, considerando que estes produtos podem ou não utilizar diversos recursos produtivos e que não há recursos produtivos suficientes para elaborar todos os produtos (Vaccaro, Rodrigues e Menezes, 2006, p. 284). De acordo com Lea (2007, pp. 1189-1190), o problema de definição de mix de produção em sua versão simplificada pode ser representado da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
&\mathit{Maximizar} \quad Z = \sum_{j=1}^{n} (P_j - c_j) x_j \\
&\mathit{Sujeito} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad i = 1,2,\dots,m \\
&\qquad\qquad x_j \le D_j \qquad j = 1,2,\dots,n \\
&\qquad\qquad x_j \ge 0 \qquad j = 1,2,\dots,n
\end{aligned}
$$

Aonde:

P_j	Representa o preço de venda do produto j;
c_j	Representa o custo do produto j;
a_{ij}	Representa a quantidade de recurso i requerida para produzir o produto j;
b_i	Representa a quantidade máxima disponível do recurso produtivo i;
x_j	Representa a quantidade do produto j a ser produzido;
D_j	Representa a demanda de mercado prevista para o produto j;
m	Representa a quantidade de produtos; e
n	Representa a quantidade de recursos produtivos.

Em termos amplos, essa falta de capacidade dos recursos produtivos para a produção de todos os produtos necessários para atender a demanda de mercado acontece principalmente quando as organizações passam por períodos de ajuste estratégico ou de investimentos, pois nos mesmos as organizações precisam aumentar ou diminuir o nível de produção. Consequentemente, visto que a definição do mix de produção esta diretamente relacionada com os ganhos a serem aferidos pela organização e que existem diversas opções de combinações dos produtos que podem atender as restrições dos recursos produtivos, a melhor solução para esse tipo de situação é a otimização da utilização desses. Entretanto, como muito bem salienta Linhares (2009, p. 122), apesar da definição das quantidades a serem produzidas, ou melhor, do mix de produção parecer um problema de fácil solução, o mesmo não pode ser entendido como tal, visto que com a inserção de novos produtos no processo de fabricação ou com a utilização de uma maior variedade de recursos produtivos que apresentem uma quantidade disponível menor do que a necessária para atender a demanda, o número de possibilidades de mix de produção aumenta exponencialmente o que, por sua vez, dificulta na obtenção do mix de produção ótimo em um curto espaço de tempo.

Para fazer frente a essa situação, algumas heurísticas construtivas baseadas na Teoria das Restrições vem sendo empregadas, visto que as mesmas proporcionam de maneira rápida a definição do mix de produção com bons ganhos totais. Entre essas heurísticas se destacam a de a TOC-h de Fredendall e Lea (1997, p. 1537). Entretanto, apesar dessa heurística apresentar bons resultados na definição de mix de produção em problemas em que existam poucos recursos produtivos, a mesma não apresenta um bom desempenho em problemas que apresentam vários recursos produtivos com capacidade inferior a necessária para atender a demanda de mercado dos produtos. Com base nesse contexto, o objetivo neste artigo é apresentar uma nova heurística construtiva que proporcione melhores soluções quando comparada com a TOC-h. Essa nova heurística se difere da TOC-h, principalmente, por levar em considerações apontamentos da TOC e do problema de mochila. Para efetuar tal comparação, foram realizadas simulações computacionais visando identificar o mix de produção que possibilitasse o maior ganho possível, considerando um bom tempo de processamento e as características do ambiente produtivo.

Com base nesse contexto, além dessa introdução, este artigo está estruturado como se segue. Na próxima seção, de maneira resumida, são definidos os conceitos básicos referentes à TOC e ao problema de mochila por meio de uma breve revisão de literatura. Na terceira seção, as heurísticas TOC-h e a heurística proposta são demonstradas. Na seção seguinte, a experimentação computacional e os resultados obtidos são apresentados. Finalmente, na última seção, as principais conclusões e sugestões a trabalhos futuros são expostos.

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 *Teoria das Restrições - TOC*

A Teoria das Restrições – TOC foi proposta e desenvolvida pelo Dr. Eliyahu M. Goldratt, por volta de 1980 (Lea & Fredendall, 2002, p. 281). De maneira mais precisa, segundo Meleton (1987) apud Verma (1997, p. 191), a TOC surgiu, em Israel, quando o Dr. Eliyahu M. Goldratt aplicou uma técnica de predição de átomos de cristal aquecido em problemas de programação de tarefas com grande número de variáveis. Em termos amplos, a TOC é compreendida como um conjunto de princípios teóricos que fundamentam e sintetizam a miríade de conhecimentos particulares de gestão e controle da produção que, por sua vez, reconhece o papel dos fatores limitantes nas operações de manufatura e se foca sobre os mesmos, visando o aumento ou a melhoria de suas utilizações. Ainda nesse contexto, utilizando-se das palavras de Watson, Blackstone, & Gardiner (2007, p. 400), a TOC pode ser compreendida como:

> [...] uma abordagem pragmática (prática) e holística (prioriza o entendimento integral dos fenômenos) de melhoria contínua, cobrindo com base em uma comum fundamentação teórica os fatores que limitam o aumento da desempenho em relação a uma meta. Assim, existe uma necessidade elevada de compreensão de técnicas específicas e das variáveis do sistema para assegurar o sucesso de sua implementação e ampla aceitação.

Tais características apontadas por esses pesquisadores são possíveis porque a TOC é capaz de auxiliar em diversas atividades fundamentais nas organizações que, por sua vez, contribuem para o desempenho global da mesma (Finch & Luebbe, 2000, p. 1466). De acordo com Corbett (2005, pp. 35-36), a característica mais importante da TOC é assumir que em qualquer sistema, isto é, em um conjunto de elementos inter-relacionados no qual existe no mínimo uma restrição, ou seja, alguma coisa que limita um melhor desempenho ou o alcance de altos padrões de desempenho. A afirmação de que todo sistema tem uma restrição se justifica ou é explicada pelo fato de que se não houvesse algo que limitasse o desempenho do sistema, esse seria infinito. Nesse sentido, a gestão ou utilização de maneira eficiente das restrições do sistema permite melhorar o desempenho do mesmo, pois com base na TOC somente os recursos gargalos, isto é, aqueles recursos que apresentam capacidade inferior à demanda sobre o mesmo, devem ser utilizados em sua total capacidade. Assim, é válido frisar que esse processo de gestão das restrições também facilita a compreensão e a possibilidade de otimização do sistema aos gestores organizacionais (Maday 1994, p. 84). De maneira mais pormenorizada, esse processo de gestão das restrições é realizado pela utilização de cinco passos de melhoria, comumente denominados como processos de melhoria contínua, a saber:

I. Identificar as restrições do sistema;
II. Decidir como explorar as restrições;
III. Subordinar todos os elementos da produção a restrição identificada no passo anterior;
IV. Aumentar as capacidades das restrições do sistema; e
V. Se nos passos anteriores às restrições forem superadas, voltar ao primeiro passo, sem deixar que a inércia se torne uma restrição.

Considerando esses cincos passos, a TOC auxilia os gestores na condução dos processos que utilizam os recursos gargalos, ou seja, visa otimizar o emprego dos recursos gargalos nas atividades produtivas. De acordo com Goldratt & Cox (2006, p. 353) e Watson, Blackstone, & Gardiner (2007, p. 338), essa abordagem de gestão sobre as restrições fez com que a TOC fosse implementada em grandes companhias como, por exemplo, 3M, *Amazon*, *AVCO*, *Bendix*, *Boeing*, *Delta Airlines*, *Ford Motor Company*, *General Electric*, *General Motor*, *Kodak*, *Philips*, *RCA*, *Westinghouse*, e, também, em organizações sem fins lucrativo tais como *British National Health Service*, *Israel Air Force*, *NASA*, *Pretoria Academic Hospital*, e *United States Department of Defense*.

2.2 Problema da Mochila

Em sua versão mais simplista, de acordo com Martello & Toth (1990, p. 1), Pisinger & Toth (1998, p. 302), e Kellerer, Pferschy, & Pisinger (2004, pp. 2-3), o problema da mochila pode ser matematicamente expresso pela definição, representando os objetos 1 até n, de um vetor de variáveis binárias $x_j (j = 1, \dots, n)$, com as características apresentada na Expressão 1:

$$x_j = \begin{cases} 1, & se\ o\ objeto\ é\ selecionado \\ 0, & caso\ contrário \end{cases} \qquad (1)$$

Considerando que p_j representa uma característica como, por exemplo, valor ou conforto do objeto j, w_j corresponde ao tamanho desse objeto, e c o tamanho da mochila, o problema será selecionar, entre todos os vetores binários, os x_j que satisfaçam a restrição demonstrada na Expressão 2.

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq c \qquad (2)$$

Além disso, a escolha dos x_j deve visar a maximização da função objetivo mostrada na Expressão 3.

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \qquad (3)$$

Kellerer, Pferschy, & Pisinger (2004, p. 15) sugerem um algoritmo do tipo *Greedy* baseado na seleção de produtos com maiores eficiência (e_j) para encontrar boas soluções. A e_j é calculada com base na Expressão 4, a saber:

$$e_j = \frac{p_j}{w_j} \qquad (4)$$

Assim, ainda com base em Kellerer, Pferschy, & Pisinger (2004, p. 16), a idéia do algoritmo é iniciar a escolha dos itens com a mochila vazia e, tão logo, ir acrescentando os itens na mesma que apresentam maior eficiência, até que se alcance o limite de capacidade da mochila. Na

Figura 1, o pseudocódigo desse algoritmo é apresentado.

Figura 1 - Algoritmo *Greedy*.

$\bar{w} := 0$	$\bar{w}$ é o peso total da mochila com todos os itens.
$Z^G := 0$	Z^G é o ganho com a solução atual.
$\boldsymbol{For}\ j := 1\ \boldsymbol{to}\ n\ \boldsymbol{do}$	
$\quad \boldsymbol{If}\ \bar{w} + w_j \leq c\ \boldsymbol{then}$	
$\quad\quad x_j := 1$	Colocando o item j na mochila.
$\quad\quad \bar{w} := \bar{w} + w_j$	
$\quad\quad Z^G := Z^G + p_j$	
$\quad \boldsymbol{Else}\ x_j := 0$	

Fonte: Kellerer, Pferschy, & Pisinger (2004, p. 16).

No tocante ao mix de produção, esse algoritmo *Greedy*, considerando que a capacidade da mochila é análoga à capacidade disponível no recurso gargalo; p_j representa o ganho individual do produto j; e w_j corresponda ao consumo de capacidade do recurso gargalo pelo produto j, apenas indicaria se um produto deve ou não ser produzido, mas seria incapaz de fornecer as quantidades a serem produzidas. Cabe destacar que no que diz respeito à TOC, que a mesma poderia ser utilizada para identificar o recurso gargalo e, tão logo, quais são os valores de e_j, ou seja, da eficiência de cada produto. Assim, há necessidade de se adaptar o algoritmo *Greedy* para que o mesmo seja capaz de indicar os produtos e suas respectivas quantidades que deverão ser selecionadas. Essa versão adaptada do algoritmo *Greedy*, denominada *B-Greedy*, é apresentada na Figura 2.

Figura 2 - Algoritmo *B-Greedy*.

$\bar{w} := 0$	$\bar{w}$ é o peso total da mochila com todos os itens.
$Z^G := 0$	Z^G é o ganho com a solução atual.
$\boldsymbol{For}\ j := 1\ \boldsymbol{to}\ n\ \boldsymbol{do}$	
$\quad \boldsymbol{If}\ \bar{w} + w_j \leq c\ \boldsymbol{then}$	
$\quad\quad x_j := min\{b_j; \lfloor (c - \bar{w})/w_j \rfloor\}$	Colocando o item j na mochila.
$\quad\quad \bar{w} := \bar{w} + w_j x_j$	
$\quad\quad Z^G := Z^G + p_j x_j$	
$\quad \boldsymbol{Else}\ x_j := 0$	

Fonte: Adaptado de Kellerer, Pferschy, & Pisinger (2004, p. 187).

O algoritmo *B-Greedy* pode facilmente ser aplicado na definição do mix de produção, desde que a TOC forneça a informação de qual recurso produtivo é o gargalo que deve orientar a definição de prioridade de processamento dos produtos, ou seja, qual recurso produtivo representará a mochila e, tão logo, poderá ser considerado para se calcular as taxas de eficiências. Com base nesse contexto, visando relacionar os elementos da TOC com os do problema da mochila no enfoque da definição de mix de produção, o relacionamento adotado neste trabalho é apresentado na Tabela 1.

Tabela 1 - Relacionando os elementos do problema da mochila com os elementos da TOC.

Problema da Mochila	Mix de Produção
j	Produto
p_j	Ganho
w_j	Consumo de Recurso Gargalo
b_j	Demanda
e_j	Eficiência
c	Capacidade Disponível no Gargalo

3 MÉTODO HEURÍSTICO

3.1 *Notação*

A seguinte notação é utilizada nos métodos heurísticos apresentados a seguir:

Índices

$i = 1,2,\dots,n$	Produtos.
$j = 1,2,\dots,m$	Recursos produtivos.
$q = 1,2,\dots,m$	Recursos gargalos.

Variáveis de Decisão

BN_q	Recurso gargalo q, ou seja, todos os recursos que apresentaram $d_j < 0$.
CP_j	Capacidade produtiva do recurso j.
CM_i	Margem de contribuição do produto i.
CR	Vetor contendo os recursos gargalos.
d_j	Diferença entre a capacidade disponível e a necessária no recurso produtivo j.
D_i	Demanda de mercado do produto i.
i	Posição do produto na sequência de produção que terão suas quantidades aumentadas.
k	Posição do produto na sequência de produção que terão suas quantidades reduzidas.
P	Produto.
q	Número de recursos gargalos.
R_i	Relação entre a margem de contribuição por cada unidade de tempo de processamento consumida no recurso gargalo.
R_{i,BN_k}	Relação entre a margem de contribuição por cada unidade de tempo de processamento consumida no recurso gargalo BN_k.
RA_i	Soma do R_i em todos os gargalos para o produto i.
t_{ij}	Tempo de processamento ou consumo de recurso do produto i no recurso produtivo

	j.
$t_{left,q}$	Sobra de recurso disponível no recurso gargalo q.
x_i	Quantidade a ser produzida do produto i.
X	Conjunto de produtos candidatos a sofrerem reduções nas quantidades.

3.2 Heurística TOC-h

A heurística TOC-h, proposta por Fredendall & Lea (1997, p. 1537), procura encontrar entre todos os gargalos existentes o gargalo dominante, ou seja, o primeiro gargalo a não apresentar capacidade suficiente para atender a demanda de mercado. Com base nesse gargalo dominante, uma solução ou um mix de produção inicial é desenvolvido visando à produção dos produtos que apresentem a maior taxa de ganho por consumo do recurso gargalo dominante. Consequentemente, por meio de uma análise dos ganhos proporcionados pelo aumento das quantidades produzidas de determinados produtos, em detrimento, da redução das quantidades de outros, uma busca na vizinhança é realizada visando melhorar o ganho total. Essa busca na vizinhança é encerrada caso o ganho total obtido ao longo do processo diminua. O pseudocódigo da heurística TOC-h é apresentado a seguir:

Passo 1 – Identifique a(s) restrição(s) do sistema:

a) Calcule a diferença (d_j) entre a capacidade dos recursos e as demandas solicitadas sobre os mesmos:

$$d_j = CP_j - \sum_{i=1}^{n} t_{ij} D_i \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ e } j = 1,2, \dots, m$$

b) Determine $\mathrm{CR} = \{\mathrm{BN}_1, \mathrm{BN}_2 \dots, \mathrm{BN}_q\}$, considerando que $\mathrm{d}_q \leq 0$ e $\mathrm{d}_1 \leq \mathrm{d}_2 \leq \dots \leq \mathrm{d}_q$.

Passo 2 – Decida como explorar a(s) restrição(s):

a) Assuma que BN_1 é o gargalo dominante. Calcule para cada produto a taxa de $\mathrm{R_i}$, ou seja, a diferença entre o preço de venda e o custo do material direto $(\mathrm{CM_i})$ dividido pelo consumo unitário de BN_1 pelo produto i:

$$R_i = CM_i / t_{i,BN_1}.$$

b) Verifique se BN_1 é o gargalo dominante:

- Se o número de recursos (q) em CR for igual a um, então o gargalo dominante é BN_1. Vá para $(2c)$.
- Se o número de recursos em CR é maior que um e todos os produtos utilizam todos os recursos, então o recurso gargalo é BN_1 e os recursos gargalos classificados são $\mathrm{BN}_2, \mathrm{BN}_3, \ldots, \mathrm{BN}_q$. Vá para (2c).
- Caso contrário, determine o recurso gargalo da seguinte maneira:
  i. Sequencie todos os produtos de maneira decrescente com base em R_i até que uma das seguintes condições seja encontrada:

  a) A demanda de mercado é encontrada (Ex.: $x_i = D_i$); e

  b) No mínimo um dos recursos gargalos não apresenta capacidade suficiente para programação de mais produtos.

  ii. Se o primeiro recurso gargalo a exaurir suas capacidades não for BN_1, Assuma o próximo BN em CR. Assim, o atual BN_1 é atualizado passando a ser BN_2. A classificação dos outros gargalos é alterada de maneira similar. O $\mathrm{R_i}$ para o novo gargalo dominante deve ser recalculado. Vá para o passo (2c).

c) Sequencie todos os produtos que requerem o gargalo dominante de maneira decrescente com base em $\mathrm{R_i}$. Para cada produto i, sequencie a máxima quantidade possível. Se dois produtos a serem programados apresentarem o mesmo R_i, sequencie primeiro o produto com a maior taxa de CM_i primeiro.

d) Quando a capacidade do gargalo dominante for exaurida ou insuficiente para produzir outra unidade do produto, então assuma BN_2 como o novo gargalo. Repita os passos (2c) e (2d) até que todos os recursos em CR estejam exauridos, ou os produtos que sobraram não utilizem desses recursos.

e) Sequencie os produtos “livres”, isto é, aqueles que não utilizam nenhum recurso gargalo até que suas demandas sejam encontradas.

f) Calcule a sobra de recurso $(t_{left,q})$ no gargalo BN_q da seguinte maneira:

$$t_{left,q} = CP_{BN_q} - \sum_{i=1}^{n} t_{i,BN_q} Q_i$$

g) Examine se reduzindo uma x_k e aumentando x_i (onde $i > k$) os ganhos aumentam (Ex.: Examine se existe um trading-off na produção de alguns produtos para outros produtos verificando se há aumento nos ganhos). Uma busca na vizinhança é conduzida para determinar quais produtos serão candidatos a essa troca. Nessa busca, o vizinho de um produto (k) é definido como o produto a jusante mais próximo, ou seja, $k+1$. Considere X como um conjunto de produtos em que se reduzindo algumas quantidades de x_k e aumentando algumas de $x_i(i > k)$ pode-se aumentar os ganhos. Esse conjunto X é encontrado da seguinte maneira:

i. Para $j = 1$ até q

Para $i = 1$ até $(n-1)$

Se $t_{i+1,BN_j} > 0$

Então se $\frac{R_{i+1}(t_{left,j}+t_{i,BN_j})}{CM_i} \geq 1$, então vá para (ii)

Caso contrário, $i = i + 1$

Caso contrário, $j = j + 1$

ii. Se $x_i < D_i$ ou $x_{i+1} < D_{i+1}$

Então faça $k = i$ e vá para (iii)

Caso contrário, $i = i + 1$ e vá para (i).

iii. $X = \{P_k, P_{k+1}, \dots, P_n\}$ se $X = \emptyset$, o corrente mix de produção é ótimo, então pare. Caso contrário, vá para o passo (2h).

h) Reduza a quantidade atual de x_k do produto P_k uma unidade por vez. Isso cria $(t_{k,BN_q} + t_{left,q})$ de tempo disponível sobre o recurso gargalo dominante. Utilize esse tempo disponível para processar $P_{k+1}, P_{k+2}, \dots,$ e P_n é baseado na sua taxa R_i $(i = k+1,\ k+2, \dots, n)$ de maneira decrescente conforme realizado no passo (2c). Calcule o ganho da seguinte maneira:

$$Ganho = \Delta x_k CM_k + \Delta x_{k+1} CM_{k+1} + \cdots + \Delta x_n CM_n$$

Aonde Δx_k é a variação de unidades para o produto P_k. Pare se o ganho é menor que zero, ou se a solução se tornar inviável (Ex.: $x_k > D_k$).

3.3 *Heurística Proposta*

A heurística proposta visa à criação de uma solução inicial considerando o gargalo dominante e a melhoria da mesma. Esse processo de criação da solução inicial é realizado com o auxílio do algoritmo *B-Greedy* para problemas aonde o gargalo dominante for identificado e de uma versão modificada do mesmo, denominada de *B-Greedy-M*, para problemas em que a identificação do gargalo dominante não for possível ou difícil. A utilização do algoritmo *B-Greedy* ou do *B-*

Greedy-M possibilita que a heurística proposta encontre uma solução inicial de maneira muito rápida o que, por sua vez, possibilita que a mesma utilize mais tempo na tentativa de melhorar a solução inicial.

Esse processo de melhoria é realizado mediante uma busca na vizinhança que considera diferentes produtos em diferentes posições, na sequência de produção. Além disso, também visando à melhoria da solução inicial, é proposta a utilização de uma taxa de ganho que leve em conta o ganho por tempo de processamento do produto i em todos os gargalos existentes de maneira conjunta e não somente no gargalo dominante, pois nem sempre é possível identificar o gargalo dominante. Consequentemente, a heurística adota como solução final ou mix de produção a melhor solução encontrada após a realização dessa busca na vizinhança. Com base nesse contexto se faz necessário apresentar primeiramente o algoritmo *B-Greedy-M*, para então se expor o pseudocódigo da heurística proposta, visto que a conceituação e utilização do *B-Greedy* já foi demonstrada na Seção 2.2.

3.3.1 O Algoritmo *B-Greedy-M*

Em alguns problemas de definição do mix de produção é difícil ou não é possível identificar o gargalo dominante em meio aos existentes. Essa situação não possibilita a aplicação do *B-Greedy*, visto que o mesmo se baseia nas taxas de eficiências, ou seja, e_j que, por sua vez, é obtida considerando o gargalo dominante. Assim, se faz necessário ajustar o *B-Greedy* para que seja identificado um mix de produção, dado à existência de vários recursos gargalos e/ou a dificuldade de identificação do recurso gargalo dominante. Com base nesse contexto, o algoritmo *B-Greedy-M* considera uma sequência de produção comum em todos os gargalos e busca identificar as quantidades máximas que cada gargalo possibilita produzir para um determinado produto, obedecendo à sequência de produção. Posteriormente, o mesmo assume como quantidade a ser produzida de um determinado produto a menor quantidade encontrada entre todos os gargalos. O pseudocódigo do algoritmo *B-Greedy-M* é apresentado na Figura 3.

Figura 3 - Algoritmo *B-Greedy-M*.

$\overline{w_q} \coloneqq 0$
$Z \coloneqq 0$
$\textbf{\textit{For}}\ j \coloneqq 1\ \textbf{\textit{to}}\ n\ \textbf{\textit{do}}$
$\quad \textbf{\textit{For}}\ q \coloneqq 1\ \textbf{\textit{to}}\ m\ \textbf{\textit{do}}$
$\quad\quad \textbf{\textit{If}}\ \overline{w_q} + w_{jq} \leq c_q\ \textbf{\textit{then}}$
$\quad\quad\quad \textbf{\textit{If}}\ w_{jq} = 0\ \textbf{\textit{then}}$
$\quad\quad\quad\quad x_{jq} \coloneqq D_i$
$\quad\quad\quad \textbf{\textit{Else}}$
$\quad\quad\quad\quad x_{jq} \coloneqq int\left\{min\{D_j; \lfloor (c_q - \overline{w_q})/w_{jq} \rfloor\}\right\}$
$\quad\quad\quad \textbf{\textit{End if}}$
$\quad\quad \textbf{\textit{Else}}$
$\quad\quad\quad x_{jq} \coloneqq 0$
$\quad\quad \textbf{\textit{End If}}$
$\quad\quad \textbf{\textit{If}}\ q = m\ \textbf{\textit{then}}$
$\quad\quad\quad \textbf{\textit{For}}\ q := 1\ \textbf{\textit{to}}\ m\ \textbf{\textit{do}}$
$\quad\quad\quad\quad \textbf{\textit{If}}\ q = 1\ \textbf{\textit{then}}$
$\quad\quad\quad\quad\quad x_j \coloneqq x_{jq}$
$\quad\quad\quad\quad \textbf{\textit{Else}}$
$\quad\quad\quad\quad\quad \textbf{\textit{If}}\ x_{jq} < x_j\ \textbf{\textit{then}}\ x_j \coloneqq x_{jq}$
$\quad\quad\quad\quad \textbf{\textit{End if}}$
$\quad\quad\quad \textbf{\textit{Next}}\ q$
$\quad\quad\quad \textbf{\textit{For}}\ q := 1\ \textbf{\textit{to}}\ m\ \textbf{\textit{do}}$
$\quad\quad\quad\quad \overline{w_q} \coloneqq \overline{w_q} + w_{jq} x_j$
$\quad\quad\quad \textbf{\textit{Next}}\ q$
$\quad\quad\quad Z \coloneqq Z + p_j x_j$
$\quad\quad \textbf{\textit{End if}}$
$\quad \textbf{\textit{Next}}\ q$
$\textbf{\textit{Next}}\ j$

É importante destacar que os parâmetros x e w para o algoritmo *B-Greedy-M* apresentam um segundo índice em relação ao algoritmo *B-Greedy*, pois a quantidade a ser produzida e o consumo de recurso gargalo de cada produto é calculado considerando a perspectiva do gargalo q.

3.3.2 O Pseudocódigo da Heurística Proposta

Considerando o algoritmo *B-Greedy* e o *B-Greedy-M*, o pseudocódigo da heurística proposta é apresentado a seguir:

Passo 1 – Identifique a(s) restrições(s) do sistema:

a) Calcule a diferença (d_j) entre a capacidade dos recursos e as demandas solicitadas sobre os mesmos:

$$d_j = CP_j - \sum_{i=1}^{n} t_{ij} D_i \qquad i = 1,2,\dots,n$$
$$j = 1,2,\dots,m$$

b) Considerando que todos os recursos que apresentarem $d_j < 0$ serão considerados recursos gargalos (BN_q), determine $CR = \{BN_1, BN_2 \dots, BN_q\}$, observando que $d_q \leq 0$ e $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_q$.

Passo 2 – Decida como explorar a(s) restrições(s) do sistema:

a) Assuma que BN_1 é o gargalo dominante. Calcule para cada produto a taxa de R_i, ou seja, a margem de contribuição por cada unidade de tempo de processamento consumida no gargalo, pela expressão $R_i = CM_i / t_{i,BN_1}$. Classifique os produtos de maneira decrescente com base no valor R_i obtido.

b) Verifique se o BN_1 é o gargalo dominante:

i. Aplique o algoritmo *B-Greedy* ao problema considerando o R_i, obtido no Passo 2a e a sequência de produção atual.

ii. Considerando o mix de produção obtido no Passo 2b.i, examine se existe alguma d_j menor do que zero, caso exista assuma o próximo BN em CR como BN_1, classifique os produtos com base nesse novo recurso gargalo e volte para o Passo 2a. Se o BN_1 for igual a BN_q e ainda existir d_j menor que zero vá para o Passo 2b.iii. Por outro lado, se não existir nenhum d_j menor que zero vá para o Passo 2c.

iii. Aplique o algoritmo *B-Greedy-M* considerando a sequência de produção dada por BN_q para obter o mix de produção que não apresente d_j menor que zero.

c) Assuma o ganho total obtido como S_1.

d) Verifique a possibilidade de melhorar a solução obtida:

i. Identifique na sequência de produção que proporcionou S_1 o último produto com o maior R_i que apresenta a produção igual à demanda, isto é, $x_i = D_i$. Reduza a demanda desse produto, uma unidade por vez, e aplique o *B-Greedy-M* considerando a classificação dos produtos dada por R_i, visando identificar o um novo mix de produção. Realize esse procedimento até que a demanda de i seja igual à $D_i - D_i \times 0{,}2$ ou não seja possível aumentar as quantidades a serem produzidas dos demais produtos. Caso existam dois produtos com o mesmo valor de R_i, sequencie o de maior CM_i primeiro. Assuma como S_2 o maior ganho total obtido na realização desse procedimento.

ii. Calcule o RA_i para todos os produtos da seguinte forma:

$$RA_i = \sum_{g=1}^{q} CM_i / t_{i,BN_g}$$

Classifique os produtos de maneira decrescente com base no RA_i e se existir produtos com o mesmo valor de RA_i, considere primeiramente o que apresentar o maior CM_i. Com base nessa nova classificação aplique o algoritmo *B-Greedy-M*, visando identificar um novo mix de produção inicial. Caso essa nova sequência de produção seja idêntica à sequência anterior proceda para o *Passo 2d.iii*. Caso contrário, iniciando a procura do produto com maior RA_i para o menor, identifique o último produto que apresentou $x_i = D_i$. Reduza a demanda desse produto, uma unidade por vez, e sequencie a produção com base nessa nova demanda até que a mesma seja igual $D_i - D_i \times 0,1$ ou não seja possível aumentar as quantidades a serem produzidas dos demais produtos. Comparando os resultados obtidos entre o novo mix de produção e os mixes de produção proporcionados pela redução da demanda do produto x_i, assuma o maior ganho total obtido como S_3.

iii. Considerando o mix de produção obtido na solução S_1, identifique o produto que apresentar o maior R_i. Reduza a demanda desse produto, uma unidade por vez, e sequencie a produção com base nessa nova demanda, utilizando o *B-Greedy-M*. Realize esse procedimento até que a demanda desse produto seja igual à $D_i - D_i \times 0,1$ ou não seja possível aumentar as quantidades a serem produzidas dos demais produtos. Assuma o maior ganho total encontrado como S_4.

iv. Se o gargalo dominante for BN_1, faça S_5 igual a zero e proceda para o Passo 2.e. Caso contrário, sequencie os produtos com base no R_i do primeiro gargalo do conjunto CR, ou seja, na maior diferença de capacidade existente. Caso exista produtos com o mesmo valor de R_i, sequencie o que apresentar maior CM primeiro. Aplique o algoritmo *B-Greedy-M* visando identificar um mix de produção. Com base no mesmo identifique o último produto que apresentar à $x_i = D_i$ diminua uma unidade por vez da demanda desse produto e sequencie novamente todos os produtos. Realize esse procedimento até que a demanda desse produto seja igual à $D_i - D_i \times 0,1$ ou não seja possível aumentar as quantidades a serem produzidas dos demais produtos. Comparando os resultados obtidos entre o mix de produção obtido com base em BN_1 e os mixes de produção proporcionados pela redução da demanda do produto x_i, assuma o maior ganho total obtido como S_5.

e) Assuma como solução final da heurística o mix de produção que apresentar o maior ganho do seguinte conjunto $\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$.

No tocante as duas heurísticas é importante destacar, como muito bem salientado por Hsu & Chung (1998, p. 37), que as mesmas são baseadas na utilização dos *Passos I* e *II* do processo de melhoria da TOC, pois os demais passos são ações gerenciais baseadas na solução desenvolvida na utilização dos dois primeiros passos. Assim considerando o escopo deste trabalho, para fins de definição de mix de produção, não se faz uso dos mesmos.

4 EXPERIMENTO COMPUTACIONAL

Com o objetivo de testar as duas heurísticas apresentadas na Seção 0, uma extensa experimentação computacional foi realizada visando identificar a melhor heurística. Ambas heurísticas foram testadas na resolução de problemas, encontrados na literatura especializada e gerados aleatoriamente. Os problemas foram divididos em dois grupos, a saber:

- Pequeno Porte: constituído por 100 problemas contendo i de 2 até 8, j de 4 até 8, e q de 1 até 4; e
- Grande Porte: constituído por 50 problemas contendo i igual a 100, j de 60 até 100, e q de 6 até 60.

Além disso, as duas heurísticas foram desenvolvidas em *VBA* e testadas em computador *Intel* 2.16 *GHz Dual Clock*, com 4 *GB* de memória *RAM*. Visando a comparação entre as heurísticas, o tempo total de processamento e o Desvio Relativo Médio – DRM foram utilizadas como medidas de comparação. O DRM foi calculado conforme a Expressão 5.

$$DRM = \frac{(f(h) - f^*)}{f^*} \times 100 \quad (5)$$

Aonde, o $f(h)$ é o ganho obtido pela heurística h, ou seja, a TOC–h ou a heurística proposta, e f^* representa a melhor solução obtida entre as duas heurísticas. Considerando os problemas de pequeno porte, o resumo dos resultados obtido pelas heurísticas, para problemas com 1, 2, 3, e 4 gargalos respectivamente é apresentado na Tabela 2.

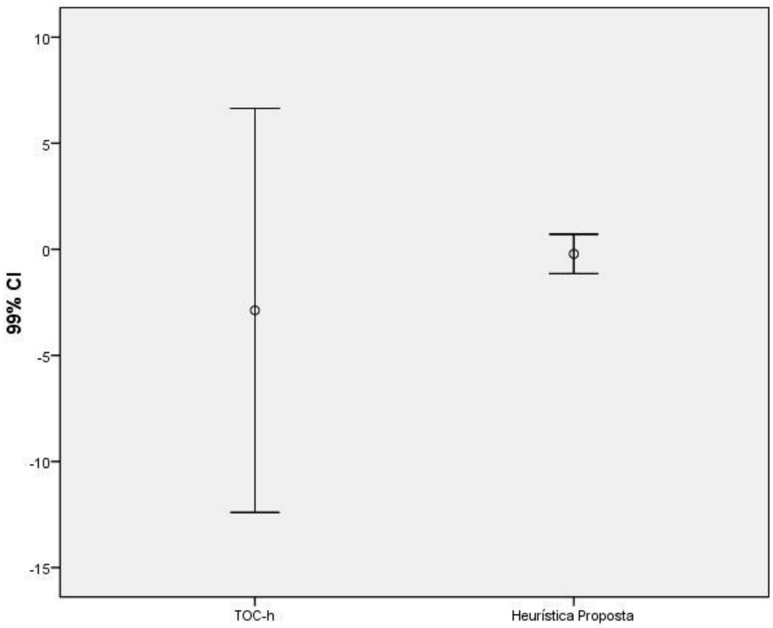
Tabela 2 – Comparação dos resultados obtidos para os problemas de pequeno porte em termo da média do DRM e do tempo total de processamento

Número de Gargalos	Heurística	
	TOC–h	Proposta
1	-0,0096[A] (00:00:00)[B]	0,0000 (00:00:00)
2	-1,0684 (00:00:00)	-0,0081 (00:00:00)
3	-3,0414 (00:00:01)	-0,1747 (00:00:02)
4	-7,3889 (00:00:00)	-0,6740 (00:00:00)
Média	-2,8771 (00:00:00)	-0,2142 (00:00:01)

[A] Média do Desvio Relativo Médio.
[B] Total de tempo necessário para processar todos os problemas com esse número de gargalos.

Além disso, considerando os problemas de pequeno porte, as médias com um intervalo de confiança de 99% são apresentadas para cada heurística na Figura 4.

Figura 4 - Média e Intervalo de Confiança (99%) das heurísticas para os problemas de pequeno porte



Com base na Tabela 2 e na Figura 4, a heurística proposta apresentou um melhor desempenho do que as heurísticas TOC-h nos problemas de pequeno porte, pois na maioria dos casos apresentou o maior resultado ou um resultado muito próximo do maior. Quanto ao tempo de processamento, visto o tamanho dos problemas, às duas heurísticas são rápidas, isto é, necessitam de menos de um segundo para resolver os problemas o que, por sua vez, não possibilita identificar diferenças significativas entre as mesmas. No tocante aos problemas de grande porte, o resumo dos resultados obtidos é apresentado na Tabela 3.

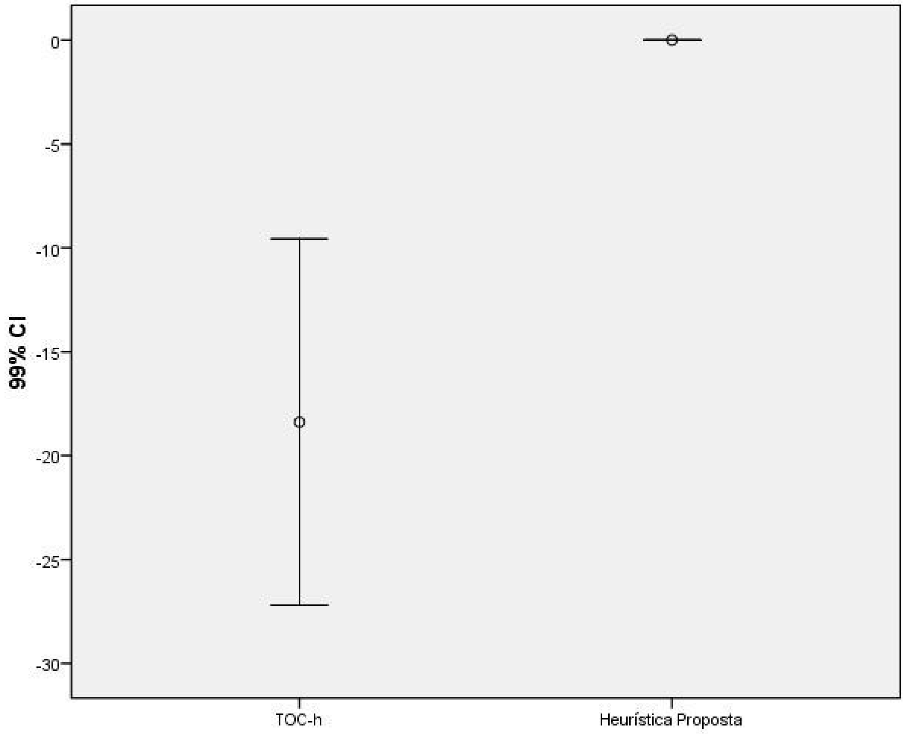
Tabela 3 - Comparação dos resultados obtidos para os problemas de grande porte em termo do DRM e do tempo total de processamento.

% de Recurso Gargalos	Heurística	
	TOC–h	**Proposta**
10	-29,8866[A] (00:00:01)[B]	0,0000 (00:00:06)
20	-2,5598 (00:00:05)	0,0000 (00:00:13)
30	-6,3177 (00:00:29)	0,0000 (00:00:16)
40	-19,7687 (00:00:40)	0,0000 (00:00:24)
50	-18,6439 (00:00:27)	0,0000 (00:00:23)
60	-18,9958 (00:01:34)	0,0000 (00:00:29)
70	-18,4878 (00:00:55)	0,0000 (00:00:36)
80	-16,4529 (00:01:59)	0,0000 (00:00:51)
90	-26,9762 (00:01:36)	0,0000 (00:00:59)
100	-25,7098 (00:01:56)	0,0000 (00:01:02)
Média	-18,3799 (00:00:58)	0,0000 (00:00:32)

[A] Desvio Relativo Médio.
[B] Total de tempo necessário para processar todos os problemas com esse número de gargalos.

Conforme apresentado na Tabela 3, a heurística proposta também apresenta um desempenho melhor do que a heurística TOC-h em problemas de grande porte, visto que apresentou em média um DRM de 0,00% em relação a melhor solução encontrada entre ambas as heurísticas e utilizou em média 32 segundos para resolver os problemas agrupados pelo percentual de gargalos existentes. É importante destacar que esse apontamento se torna mais expressivo quando a quantidade de recursos gargalos aumenta no ambiente produtivo, ou seja, quando há muitos recursos gargalos no sistema produtivo a TOC-h utiliza muito tempo na tentativa de identificar quais desses recursos é o gargalo dominante. Em contrapartida a heurística proposta utiliza pouco tempo na criação da solução inicial e mais tempo na melhoria da mesma. Essa característica proporciona à heurística proposta uma menor variabilidade em relação à média do DRM do que a heurística TOC-h conforme apresentado na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**.

Figura 5 - Média e Intervalo de Confiança (99%) das heurísticas para os problemas de grande porte



Considerando que a heurística proposta apresentou um melhor desempenho tanto para os problemas de pequeno quanto para os de grande porte, a mesma foi comparada com as soluções ótimas obtidas por meio da técnica de Programação Linear Inteira - P.L.I., calculadas por meio VBA com o auxílio do algoritmo LP Simplex® desenvolvido pela Frontline Systems Inc e disponível como suplemento no aplicativo Microsoft Excel® 2010. Para tanto foi definido um tempo máximo de 24 horas para realização desse processo de procura da solução ótima, visto que tal processo de busca pela solução ótima pode ser um processo moroso, ou seja, caso a técnica de P.L.I. utilizasse 24 horas para encontrar a solução ótima e não a encontrasse a melhor solução encontrada seria adotada como tal valor. Com base nesse contexto, assumindo que os valores obtidos pela técnica de P.L.I. são f^*, na Tabela 4 são apresentados os DRM da heurística proposta e o tempo total de processamento para os problemas de pequeno porte e na

Tabela 5 tais resultados são apresentado para os problemas de grande porte.

Tabela 4 - Comparação considerando o DRM entre a heurística proposta e a técnica de P.L.I.

Número de Gargalos	DRM	Tempo de Processamento Total	
	Heurística Proposta	Heurística Proposta	P.L.I.
1	0,0000	00:00:00	00:00:00
2	-0,4688	00:00:00	00:00:13
3	-2,4955	00:00:02	00:00:05
4	-3,8021	00:00:00	00:00:04
Média	-1,6916	00:00:01	00:00:06

Tabela 5 - Comparação considerando o DRM entre a heurística proposta e a técnica de P.L.I.

% de Gargalos	DRM	Tempo de Processamento Total	
	Heurística Proposta	Heurística Proposta	P.L.I.
10	-29,4855	00:00:06	00:32:23
20	-19,6491	00:00:13	00:29:38
30	-19,1612	00:00:16	00:33:54
40	-12,9456	00:00:24	00:17:08
50	-20,7603	00:00:23	00:47:29
60	-14,5410	00:00:29	02:41:36
70	-17,8203	00:00:36	01:00:04
80	-13,9182	00:00:51	03:02:37
90	-11,6786	00:00:59	24:42:32[A]
100	-13,1521	00:01:02	01:24:41
Média	-17,3112	00:00:32	03:33:12

[A] Nesse conjunto de problemas houve um problema em que a técnica de P.L.I. não obteve a solução ótima depois de 24 horas.

A heurística proposta apresentou na média um DRM de aproximadamente 17,32% em relação aos resultados ótimos. Apesar de esse valor ser expressivo, houve uma diminuição significativa na média do tempo total de processamento utilizado para resolução desses problemas o que, por sua vez, evidência a eficiência e robustez da heurística proposta.

Ainda no tocante ao desempenho da heurística proposta, Linhares (2009, p. 128) aponta que um dos principais problemas ou falhas das heurísticas desenvolvidas para os problemas de definição de mix de produção, apesar de sua eficiência na solução de problemas mais complexos, é a dificuldade de obtenção das soluções ótimas para problemas com apenas um gargalo. Entretanto, conforme exposto na Tabela 4, a heurística proposta não apresenta essa dificuldade, pois conseguiu encontrar todas as soluções ótimas para esses problemas mais simples.

5 CONCLUSÕES

Neste artigo foi tratado o problema de definição de mix de produção, com o objetivo de maximizar o ganho, considerando a Teoria das Restrições e aspectos do problema da mochila, por meio de heurísticas construtivas. De maneira prática, tal problema pode ser compreendido como a definição das quantidades a serem produzidas de cada produto quando os recursos produtivos não apresentam capacidades suficientes para atender a toda demanda. Entretanto, a busca de soluções próximas à ótima pelo uso de eficientes e simples heurísticas ainda necessita de pesquisas, visto que esse problema é do tipo NP-Completo. Dentro desse contexto, foi proposta uma nova heurística para esse problema com base na TOC e no problema da mochila que apresentou um melhor desempenho, em termos de qualidade de solução, do que a heurística TOC-h de Fredendall & Lea (1997, p. 1537). Assim, pode-se concluir que a heurística proposta é muito mais eficiente que as heurísticas existente o que, em suma, destaca sua importância na definição de mix de produção. No tocante a indicação de pesquisas futuras, é proposta a realização de estudos que verificassem a utilização da heurística proposta em situação prática.

REFERÊNCIAS

CORBETT, T. **Bússola financeira**: o processo decisório da teoria das restrições. São Paulo: Nobel, 2005. 208 p.

FINCH, B. J.; LUEBBE, R. L. Response to 'theory of constraints and linear programming: a re-examination'. **International Journal of Production Research**, 38, n. 6, p.1465-1466, 2000.

FREDENDALL, L. D.; LEA, B. R. Improving the product mix heuristic in the theory of constraints. **International Journal of Production Research**, v.35, p.1535-1544,1997.

GOLDRATT, E. M.; COX, J. **A meta**: um processo de melhoria contínua. 2. ed. São Paulo: Nobel, 2006. 365 p.

HSU, T.-C.; CHUNG, S.-H. The TOC-based algorithm for solving product mix problems. **Production Planning & Control**, v.9, n. 1, p. 36-46,1998.

KELLERER, H.; PFERSCHY, U.; PISINGER, D. **Knapsack Problems**. 1. ed. Berlin: Springer, 2004. 546 p.

LEA, B.-R. Management accounting in ERP integrated MRP and TOC environments. **Industrial Management & Data Systems**, v.107, n. 8, p. 1188-1211, 2007.
LEA, B.-R.; FREDENDALL, L. D. The impact of management accounting, product structure, product mix algorithm, and planning horizon on manufacturing perfomance. **International Journal Production Economics**, n.79, p. 279-299, 2002.

LINHARES, A. Theory of constraints and the combinatorial complexity of the product-mix decision. **International Journal Production Economics**, n. 121, p.121-129, 2009.

MADAY, J. C. Proper use of constraint management. **Production and Inventory Management Journal**, 35, n. 1, p.84,1994.

MARTELLO, S.; TOTH, P. **Knapsack problems**: algorithms and computer implementations. 1. ed. Guildford: John Wiley & Sons, 1990. 306 p. ISBN 0471924202.

PISINGER, D.; TOTH, P. Knapsack Problems. In: DU, D. Z.; PARDALOS, P. M. **Handbook of combinatorial optimization**. 1. ed. Boston: Kluwer Academic Publisher, v. I, p. 299-428,1998.

VACCARO, G. L. R.; RODRIGUES, L. H.; MENEZES, F. M. Um estudo da implantação de um otimizador de mix para o setor agropecuário. **Gestão & Produção**, 13, n. 2, p. 283-295, maio/ago. 2006.

VERMA, R. Management Science, Theory of Constraints/Optimized Production Technology and Local Optimization. **Omega**, 25, n. 2, p.189 – 200,1997.

WATSON, K. J.; BLACKSTONE, J. H.; GARDINER, S. C. The evolution of a management philosophy: The theory of constraints. **Journal of Operations Management**, n.25, p.387 – 402, 2007.

Artigo recebido em 21/10/2011 e aceito para publicação em 03/06/2013.