



**UMA ABORDAGEM PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE  
ESCALONAMENTO DE MOTORISTAS**

**AN APPROACH FOR SOLVING THE DRIVER ROSTERING  
PROBLEM**

**Fábio Gavião Avelino de Mélo**

Professor Titular

Faculdade de Administração e Informática – FAI

Av. Antônio de Cássia, 472 – Santa Rita do Sapucaí, MG

[gaviao\\_tsi@uol.com.br](mailto:gaviao_tsi@uol.com.br)

**Edson Luiz França Senne**

Professor Adjunto

Universidade Estadual Paulista – UNESP/FEG

Faculdade de Engenharia – Departamento de Matemática

Av. Ariberto Pereira da Cunha, 333 – Guaratinguetá, SP

[elfsenne@feg.unesp.br](mailto:elfsenne@feg.unesp.br)

**Luiz Antonio Nogueira Lorena**

Pesquisador Titular

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE/LAC

Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada

Av. dos Astronautas, 1510 – São José dos Campos, SP

[lorena@lac.inpe.br](mailto:lorena@lac.inpe.br)

**RESUMO**

O problema de escalonamento de motoristas consiste na criação e atribuição de escalas de serviços a pessoas por um determinado período, respeitando restrições operacionais e trabalhistas, e procurando alcançar certos objetivos. Trata-se de problema complexo e de difícil solução. A solução proposta neste trabalho utiliza modelos de Programação Inteira, que são resolvidos por otimizadores comerciais, e algoritmos definidos em grafos para tratar restrições e objetivos difíceis de serem inseridos nestes modelos. A abordagem proposta divide o problema em cinco etapas. O objetivo final é encontrar escalas bem equilibradas do



ponto de vista da carga de trabalho dos motoristas. Neste trabalho são considerados dados de um pequeno exemplar do problema para ilustrar, passo-a-passo, a abordagem proposta. Testes computacionais realizados com a abordagem proposta sugerem que boas soluções podem ser obtidas rapidamente.

**Palavras-chave:** Escalonamento de motoristas, Programação Inteira, Teoria dos Grafos.

## ABSTRACT

The driver rostering problem consists in the creation and assignment of scales of services to people for a certain period, respecting both operational and labor constraints, in order to reach some objectives. It is a complex problem whose solution, in general, is very difficult to obtain. The solution proposed in this work uses Integer Programming models, which can be solved by commercial solvers, and algorithms defined on graphs to treat restrictions and objectives which are difficult to be inserted in these models. The proposed approach divides the problem in five stages. The final goal is to find balanced scales in order to distribute the workload among the drivers. In this work data of a small instance of the problem are considered for a step-to-step illustration of the proposed approach. Computational tests accomplished with the proposed approach suggest that good solutions can be obtained quickly.

**Key words:** Driver rostering, Integer Programming, Graph Theory.

## 1. INTRODUÇÃO

O Problema de Escalonamento de Motoristas (PEM) consiste na criação e atribuição de escalas de serviços a pessoas por um determinado período, respeitando restrições operacionais e trabalhistas, e procurando atingir certos objetivos. Trata-se de um problema NP-difícil (Karp, 1972) e que vem sendo estudado há aproximadamente 50 anos. Existe uma grande dificuldade em incluir, em um único modelo, todas as restrições e objetivos necessários para a formulação do problema.

Este trabalho mostra como o PEM vem sendo resolvido por uma abordagem que combina Teoria de Grafos e Programação Inteira (Wolsey, 1998). A solução proposta neste trabalho emprega otimizadores comerciais para a solução dos modelos de otimização e algoritmos definidos em grafos para tratar restrições e objetivos difíceis de serem inseridos nestes modelos. O objetivo final é encontrar escalas bem equilibradas do ponto de vista da carga de trabalho dos motoristas. O estudo baseou-se em uma empresa real da área de transporte interurbano no Brasil.



Este artigo está organizado da forma descrita a seguir. Na seção 2, apresenta-se uma breve revisão bibliográfica sobre o problema, apontando as técnicas que vêm sendo utilizadas para a solução do problema e trabalhos já desenvolvidos para algumas situações práticas. Na seção 3, apresenta-se uma lista de termos técnicos usados na área do PEM, importantes para a compreensão do restante do artigo. Na seção 4 são descritas as etapas que compõem a abordagem proposta neste trabalho. Na seção 5, discute-se a solução adotada para cada uma das etapas da abordagem proposta, ilustrando a solução do problema para uma aplicação simples. Na seção 6 são apresentados alguns comentários sobre testes computacionais realizados e, finalmente, na seção 7, são apresentadas as conclusões do trabalho.

## 2. REVISÃO DA LITERATURA

A Programação Inteira tem sido usada, preferencialmente, como método de solução do PEM (Eitzen, 2002). Porém, dada a complexidade do problema, nem sempre os modelos de Programação Inteira podem ser resolvidos em um tempo computacional razoável. Assim, várias abordagens aproximadas têm sido desenvolvidas, como *Tabu Search* (Burke *et al.*, 2001), *Simulated Annealing* (Owens, 2001), heurísticas híbridas (Fahle e Bertels, 2002), Algoritmos Genéticos (Aickelin e White, 2004), e técnicas de decomposição (Abbink *et al.*, 2007). Outras técnicas de solução aparecem em Mateus e Casimiro (2002) e Eitzen *et al.* (2004). Uma pesquisa bibliográfica sobre o problema pode ser encontrada em Ernst *et al.* (2004b).

Devido à importância do problema, diversos estudos já foram realizados para situações práticas, dentre os quais se destacam: Caprara *et al.* (1999), para o problema da companhia ferroviária estatal Italiana; Mason e Nielsen (1999), no desenvolvimento do *framework* Petra, um pacote genérico para solucionar problemas de escalonamento (de tripulações) que vem sendo empregado em diferentes situações na Nova Zelândia; Emden-Weinert *et al.* (2001), sobre o problema de ônibus e bondes elétricos de superfície; Shodi e Norris (2004), sobre o problema de escalonamento para o metrô de Londres; Cappanera e Gallo (2004), sobre o escalonamento de tripulação para empresas aéreas na Europa; Kohl e Karisch (2004), num estudo de caráter teórico sobre o tema, onde também foi incluída a teoria de grafos.

A tendência para o equacionamento e a solução do PEM tem sido a divisão do problema em etapas (Esclapés, 2000; Ernst *et al.*, 2004a). As etapas são resolvidas



independentemente ou agrupadas. Este trabalho segue também esta tendência, dividindo o problema em cinco etapas, com base na experiência de uma empresa típica da área.

### 3. TERMOS USADOS NA ÁREA DE ESCALONAMENTO DE MOTORISTAS

Alguns termos importantes para a compreensão do problema são:

- **Viagem:** é a tarefa de conduzir passageiros de um ponto a outro, sendo conhecidos o horário de embarque e desembarque, bem como o local de partida e de chegada nestes pontos.
- **Jornada:** é a combinação de várias viagens que serão atribuídas a um motorista para compor o seu dia de trabalho. Também conhecido como turno de trabalho.
- **Jornada de expediente:** refere-se a uma jornada normal de trabalho.
- **Jornada de folga:** refere-se a um dia de descanso remunerado que faz parte da escala de serviço do motorista.
- **Demanda da empresa:** é a quantidade de jornadas que devem ser cumpridas num mesmo dia de modo a atender ao mercado. De acordo com os dias da semana e as estações do ano, a quantidade de jornadas, bem como as viagens previstas em cada uma, podem ser diferentes.
- **Escala de serviço:** é a combinação diária das jornadas de expediente e das jornadas de folga durante um intervalo de tempo. Cada combinação deverá ser atribuída a um único motorista. Uma vez conhecida sua escala, o motorista sabe onde deve se apresentar a cada dia, bem como quais serão os seus dias de folga.
- **Padrões de folga:** são seqüências de expediente e de folga que se repetem ao longo de um período e que podem ser atribuídas a um motorista. Por exemplo, o padrão  $3 \times 1$  indica uma seqüência de três dias de expediente seguidos por um dia de folga, o que se repete durante todo o período de cobertura da escala.
- **Linha de serviço:** é a identificação de uma seqüência de cidades a serem visitadas durante uma jornada. A linha normalmente se mantém fixa por um longo período. Associados a cada linha têm-se os locais e horários por onde o ônibus deverá passar.
- **Motoristas regulares:** são funcionários contratados e com carteira assinada.
- **Motoristas cobre-turno:** são motoristas sem vínculo empregatício com a empresa, mas contratados para prestação de serviços temporários.



#### 4. AS ETAPAS DO PROBLEMA

Neste trabalho, propõe-se a divisão do problema nas seguintes etapas:

- Etapa 1: Determinação do número de padrões de folga (DNPF).
- Etapa 2: Determinação das escalas de serviço viáveis (DESV).
- Etapa 3: Determinação das escalas de serviço definitivas (DESD).
- Etapa 4: Determinação dos melhores pares de expediente e folga (DMPE).
- Etapa 5: Atribuição dos pares de expediente e folga aos motoristas (APEM).

A Figura 1 ilustra a seqüência de execução destas etapas para a solução do PEM pela heurística proposta.

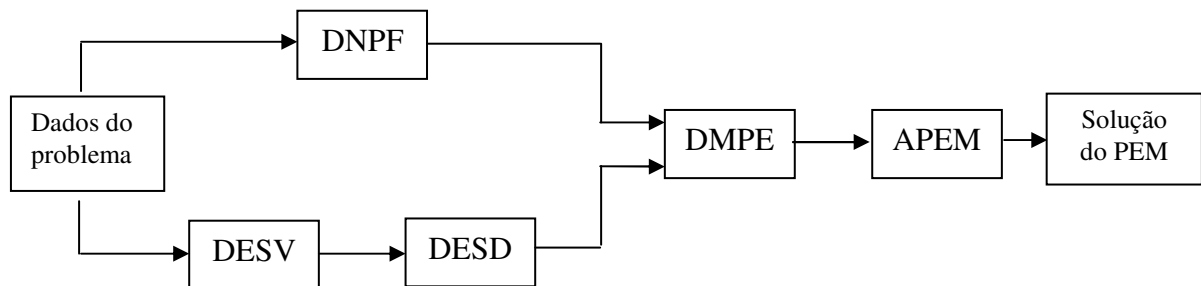


Figura 1 – Seqüência de execução das etapas propostas para o PEM

A descrição dos problemas de cada etapa e a solução proposta para cada uma destas etapas são apresentadas a seguir. A solução final do PEM consiste num conjunto de escalas de serviço, atribuídas, cada uma, a um único motorista.

#### 5. SOLUÇÃO DAS ETAPAS PROPOSTAS

Para ilustrar o método de solução do PEM proposto neste trabalho, considera-se o seguinte problema: Uma empresa de transporte de passageiros opera em uma grande área e divide o problema de escalonamento de motoristas por sedes. Cada sede compreende várias micro-regiões, com suas respectivas jornadas. Considere que em uma destas sedes existem duas micro-regiões. Na micro-região 1, existem as jornadas A e B, e na micro-região 2, existem as jornadas C, D e E, como mostra a Figura 2 a seguir.

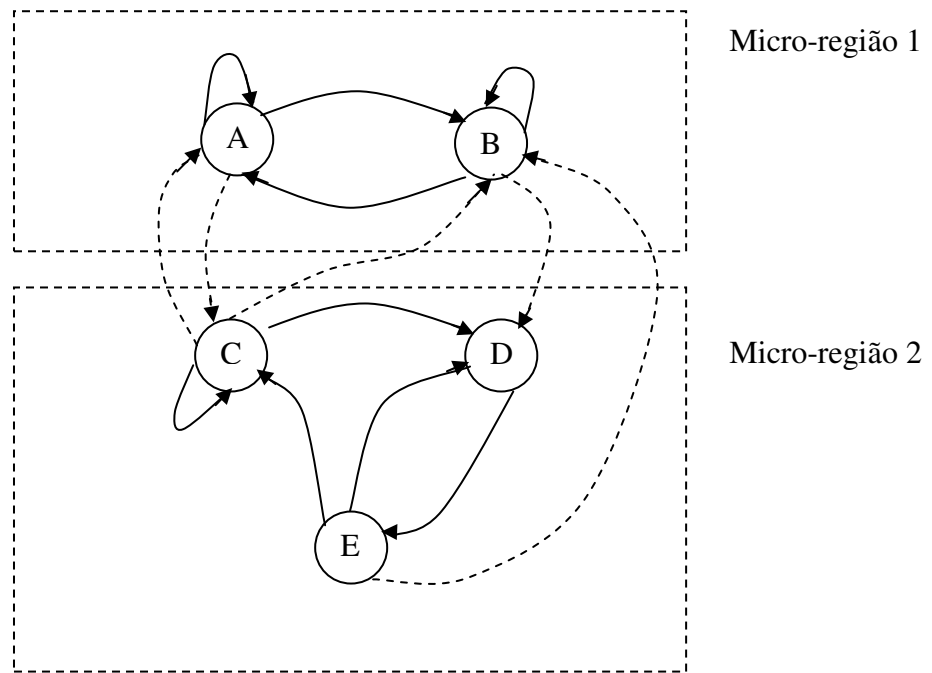


Figura 2 – Jornadas das micro-regiões

Na Figura 2, os arcos representam as transições que um motorista pode fazer de uma jornada para a outra. As transições entre microrregiões são mostradas em linhas tracejadas. As transições entre jornadas obedecem as seguintes restrições operacionais e trabalhistas:

- O local de embarque da próxima jornada tem que coincidir com o local de desembarque da jornada anterior. Isto é necessário porque o pernoite dos motoristas tem que ser feito em seu local de domicílio.
- Deve existir um intervalo mínimo de 11 horas entre o desembarque de uma jornada e o embarque da próxima.

A Tabela 1 mostra os locais e horários de embarque e desembarque de cada uma das jornadas. Os dados desta tabela serão importantes para a determinação da duração das jornadas.

Tabela 1 – Características das jornadas

|   | Embarque |         | Desembarque |         |
|---|----------|---------|-------------|---------|
|   | Local    | Horário | Local       | Horário |
| A | PA       | 09:30   | PA          | 17:30   |
| B | PA       | 17:15   | PA          | 03:15   |

Continua...



continuação

|   | Embarque |         | Desembarque |         |
|---|----------|---------|-------------|---------|
|   | Local    | Horário | Local       | Horário |
| C | PA       | 13:30   | PA          | 18:00   |
| D | PA       | 17:00   | CP          | 20:30   |
| E | CP       | 16:30   | PA          | 23:00   |

A empresa deseja, para esta sede, o escalonamento de seus motoristas para um período de 5 dias, de modo a cobrir as seguintes jornadas diárias:

- dia 1: A, B, C, D, E
- dia 2: A, B, E
- dia 3: B, C, D
- dia 4: A, B, C, D, E
- dia 5: A, B, E

Considere que nesta sede, a empresa adota 4 padrões de folga:

- padrão de folga 1: (1, 1, 1, 0, 1)
- padrão de folga 2: (1, 1, 0, 1, 1)
- padrão de folga 3: (1, 0, 1, 1, 0)
- padrão de folga 4: (0, 1, 1, 1, 1)

Em cada padrão de folga, o valor 1 corresponde a uma jornada de expediente e o valor 0, a uma jornada de folga. Note, portanto, que neste caso a empresa adota os padrões:  $3 \times 1$ ,  $2 \times 1$ ,  $2 \times 1$  e  $4 \times 1$ .

### 5.1 – Determinação do número de padrões de folga

O objetivo desta etapa é determinar uma estimativa para o número mínimo de motoristas necessários para atender a demanda diária de jornadas, levando em consideração os padrões de folga adotados pela empresa. Este problema pode ser modelado como um problema de cobertura de conjuntos como:

$$\text{Min } z = \sum_{i=1}^m x_i \quad (1)$$



$$\text{sujeito a: } \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq d_j \quad (j=1, \dots, n) \quad (2)$$

$$a_{ij} \in \{1,0\}, x_i \in Z^+, d_j \in Z^+ \quad (3)$$

onde:  $m$  é o número de padrões de folga;  $n$  é o número de dias do escalonamento;  $d_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) é o número de jornadas do dia  $j$  (demanda);  $a_{ij}$  ( $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ ) é a matriz de cobertura, tal que  $a_{ij} = 1$  se o dia  $j$  for coberto pelo padrão de folga  $i$ , ou seja, se o dia  $j$  for dia de expediente no padrão de folga  $i$ , e  $a_{ij} = 0$ , caso contrário;  $x_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) representa a quantidade de padrões de folga  $i$ . Observe que o valor de  $z$  corresponde ao número mínimo de motoristas que a empresa necessitará para atender a sua demanda de jornadas diárias.

Para o exemplo acima tem-se que:

$$d = | 5 \quad 3 \quad 3 \quad 5 \quad 3 | \quad \text{e} \quad a = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Neste caso, o vetor solução será:  $x = | 1 \quad 3 \quad 2 \quad 0 |$ , ou seja, para cobrir a demanda de jornadas diárias serão necessários 6 motoristas, sendo, 1 com o padrão de folga 1, 3 com o padrão de folga 2, 2 com o padrão de folga 3 e nenhum motorista com o padrão de folga 4. Trata-se apenas de uma estimativa, pois o número correto de motoristas e os padrões de folga a serem adotados serão determinados nas etapas seguintes.

## 5.2 - Determinação das escalas de serviço viáveis

Alguns autores (Caprara *et al.*, 1998; Shodi e Norris, 2004; Cappanera e Gallo, 2004) têm usado a teoria de grafos como técnica para a inserção de restrições operacionais e trabalhistas do problema no modelo de solução. A abordagem aqui apresentada considera o grafo de jornadas como mostrado na Figura 2 e constrói um outro grafo ( $G_t$ ) para a determinação de escalas de serviço viáveis. A construção do grafo  $G_t$  leva em conta restrições de caráter temporal, tais como: não haver interrupção entre os dias da escala e não alocar a um motorista mais de uma jornada no mesmo dia. A Figura 3 mostra o grafo temporal de transições de jornadas para o grafo da Figura 2.



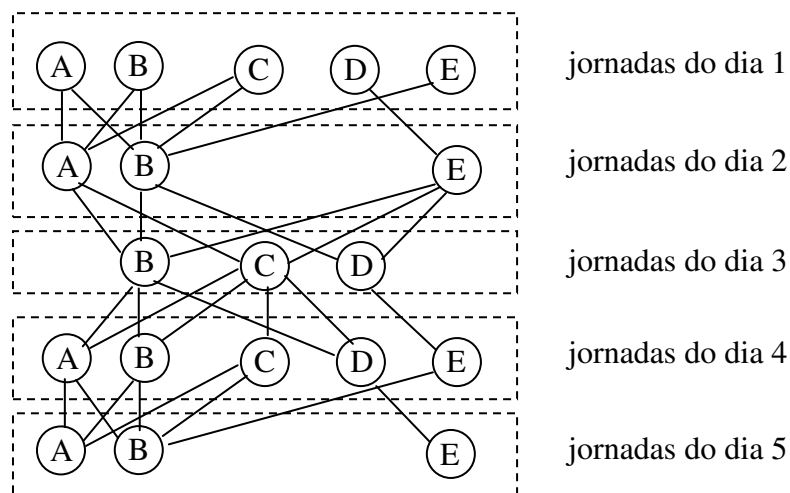


Figura 3 – Grafo temporal de transições de jornadas ( $G_t$ )

No grafo da Figura 3, os vértices representam as jornadas de cada dia e os arcos, as transições possíveis entre jornadas consecutivas. O grafo  $G_t$  é utilizado pelo algoritmo da Figura 4 para gerar uma população de escalas viáveis. O algoritmo procura, recursivamente, por todas as transições possíveis em  $G_t$  a partir de um nó  $p$  inicial. Alguns limites são impostos às escalas determinadas por este algoritmo, tais como: o número de jornadas de cada escala deve ser igual ao número de dias do escalonamento, e a duração de uma escala não pode diferir em mais de 30% (para mais ou para menos) da duração ideal. Considera-se como ideal a duração de uma escala em que todas as jornadas são de 8 horas. Assim, para uma escala com 5 jornadas, a duração ideal é de 40 horas.

```

Encontrar trajeto(p)
{
    Incluir(p);
    q = p->Transição;
    Se (q == NULL) Então
        Construir trajeto;
        Remove último vértice do trajeto corrente;
    Senão
        Enquanto (q != NULL)
            Encontrar trajeto(q->Jornada);
            q = q->próximo;
        Fim enquanto
        Remove último vértice do trajeto corrente;
    Fim Se
}
    
```

Figura 4 – Algoritmo para determinação de escalas de serviço viáveis



Para o problema acima, o algoritmo da Figura 4 determina 71 escalas de serviço viáveis, como mostra a Tabela 2.

Tabela 2 – Escalas de serviço viáveis

| p = A     | p = B     | p = C     | p = D     | p = E     |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| A-A-B-A-A | B-A-B-A-A | C-A-B-A-A | D-E-B-A-A | E-B-B-A-A |
| A-A-B-A-B | B-A-B-A-B | C-A-B-A-B | D-E-B-A-B | E-B-B-A-B |
| A-A-B-B-A | B-A-B-B-A | C-A-B-B-A | D-E-B-B-A | E-B-B-B-A |
| A-A-B-B-B | B-A-B-B-B | C-A-B-B-B | D-E-B-B-B | E-B-B-B-B |
| A-A-B-D-E | B-A-B-D-E | C-A-B-D-E | D-E-B-D-E | E-B-B-D-E |
| A-A-C-A-A | B-A-C-A-A | C-A-C-A-A | D-E-C-A-A | E-B-D-E-B |
| A-A-C-A-B | B-A-C-A-B | C-A-C-A-B | D-E-C-A-B |           |
| A-A-C-B-A | B-A-C-B-A | C-A-C-B-A | D-E-C-B-A |           |
| A-A-C-B-B | B-A-C-B-B | C-A-C-B-B | D-E-C-B-B |           |
| A-A-C-C-A | B-A-C-C-A | C-A-C-C-A | D-E-C-C-A |           |
| A-A-C-C-B | B-A-C-C-B | C-A-C-C-B | D-E-C-C-B |           |
| A-A-C-D-E | B-A-C-D-E | C-A-C-D-E | D-E-D-E-B |           |
| A-B-B-A-A | B-B-B-A-A | C-B-B-A-A |           |           |
| A-B-B-A-B | B-B-B-A-B | C-B-B-A-B |           |           |
| A-B-B-B-A | B-B-B-B-A | C-B-B-B-A |           |           |
| A-B-B-B-B | B-B-B-D-E | C-B-B-B-B |           |           |
| A-B-B-D-E | B-B-D-E-B | C-B-B-D-E |           |           |
| A-B-D-E-B |           | C-B-D-E-B |           |           |

### 5.3 - Determinação das escalas de serviço definitivas

A duração das escalas determinadas na etapa anterior varia muito entre si. Para melhor distribuir a carga de trabalho entre os motoristas, deseja-se selecionar um conjunto de escalas viáveis com a menor variação de duração possível, que cubra todas as jornadas diárias da empresa ao menos uma vez. Para isso, determina-se a duração média ( $d_{med}$ ), levando-se em conta as durações de todas as escalas determinadas na etapa anterior e formula-se o problema como:

$$\text{Min } \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (4)$$

$$\text{sujeito a: } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 1 \quad (i = 1, \dots, m) \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} x_j \geq 1 \quad (i = 1, \dots, m \mid i \in p) \quad (6)$$

$$p = \{i \mid d_i < d_{max}\} \quad (7)$$

$$x_j \in \{1, 0\} \quad (j = 1, \dots, n) \quad (8)$$



onde:  $m$  é o número total de demandas diárias de jornadas;  $n$  é a quantidade de escalas viáveis obtidas na etapa anterior;  $c_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) é a diferença, em valor absoluto, entre ( $d_{med}$ ) a duração média das escalas e a duração da escala  $j$ ;  $d_i$  é a demanda diária de jornadas do dia  $i$ ;  $d_{max}$  é a demanda máxima de jornadas do escalonamento;  $p$  é o conjunto de índices das jornadas que pertencem aos dias em que a demanda de jornadas é menor do que a demanda máxima;  $a_{ij}$  ( $i = 1, \dots, m \mid i \notin p; j = 1, \dots, n$ ) é a matriz de cobertura dos dias cuja demanda de jornadas iguala a demanda máxima, tal que  $a_{ij} = 1$  se a jornada  $i$  for coberta pela escala  $j$ , e  $a_{ij} = 0$ , caso contrário;  $b_{ij}$  ( $i = 1, \dots, m \mid i \in p; j = 1, \dots, n$ ) é a matriz de cobertura das jornadas dos dias cuja demanda é menor do que a demanda máxima, tal que  $b_{ij} = 1$  se a jornada  $i$  for coberta pela escala  $j$ , e  $b_{ij} = 0$ , caso contrário;  $x_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) é a variável de decisão tal que  $x_j = 1$ , se a escala  $j$  foi escolhida como definitiva, e  $x_j = 0$ , caso contrário.

Considerando o problema-exemplo, este modelo seleciona as seguintes escalas:

- escala 18: A–B–D–E–B
- escala 29: B–A–C–C–B
- escala 36: C–A–B–A–A
- escala 56: D–E–B–B–A
- escala 70: E–B–B–D–E

Observe na Tabela 3 o atendimento das jornadas diárias conforme a solução encontrada.

Tabela 3 – Cobertura das jornadas diárias

| Dia    | Escalas definitivas |    |    |    |    | Jornadas do dia |
|--------|---------------------|----|----|----|----|-----------------|
|        | 18                  | 29 | 36 | 56 | 70 |                 |
| 1º dia | A                   | B  | C  | D  | E  | A, B, C, D, E   |
| 2º dia | B                   | A  | A  | E  | B  | A, B, E         |
| 3º dia | D                   | C  | B  | B  | B  | B, C, D         |
| 4º dia | E                   | C  | A  | B  | D  | A, B, C, D, E   |
| 5º dia | B                   | B  | A  | A  | E  | A, B, E         |



O próximo passo é utilizar estas escalas juntamente com os padrões de folga obtidos na primeira etapa para obter a melhor formação de pares de expediente e de folga a serem atribuídos aos motoristas.

#### 5.4 - Determinação dos melhores pares de expediente e folga

Nesta etapa, deseja-se atribuir os padrões de folga determinados na primeira etapa às escalas definitivas determinadas na etapa anterior procurando minimizar a variação dos padrões de folga ao longo das escalas e o número de motoristas cobre-turnos.

Para reduzir a variação dos padrões de folga procura-se determinar o maior subconjunto de escalas sem sobreposição dentro do conjunto de escalas definitivas encontrados na etapa anterior. Para isto, define-se uma matriz de folgas  $mf_{ij}$  ( $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, m$ ), cujas linhas representam as escalas definitivas e as colunas, os dias do escalonamento, tal que:  $mf_{ij} = 1$  se a jornada do dia  $j$  da escala  $i$  é coberta por alguma outra escala, e  $mf_{ij} = 0$ , caso contrário.

Para determinar a matriz de folgas, escolhe-se aleatoriamente uma escala  $i$  como escala inicial e faz-se  $mf_{ij} = 0$  ( $j = 1, \dots, m$ ). Em seguida, escolhe-se outra escala  $i$  e determinam-se os valores de  $mf_{ij}$  ( $j = 1, \dots, m$ ) correspondentes, repetindo-se este processo até que todas as escalas definitivas tenham sido consideradas. Ao final deste processo, armazena-se a matriz de folgas obtida e todo o procedimento é repetido considerando-se uma outra escala definitiva como escala inicial. Ao final do procedimento escolhe-se a matriz de folga que contém o maior número de linhas formadas apenas por elementos iguais a zero.

Para o problema exemplo considerado acima, este procedimento resulta na matriz de folgas mostrado na Figura 5.

| Escalas | Dias do escalonamento |   |   |   |   |
|---------|-----------------------|---|---|---|---|
|         | 1                     | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 18      | 0                     | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 29      | 0                     | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 36      | 0                     | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 56      | 0                     | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 70      | 0                     | 1 | 1 | 0 | 0 |

Figura 5 – Matriz de folgas para as escalas definitivas



Para determinar o número de motoristas cobre-turnos necessários comparam-se os elementos das linhas da matriz de folgas obtida com os elementos das linhas da matriz de cobertura utilizada na primeira etapa,  $a_{ij}$  ( $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, m$ ), onde as linhas representam os padrões de folga e as colunas, os dias do escalonamento. O resultado desta comparação usa a seguinte regra mostrada na Tabela 4.

Tabela 4 – Regra para determinar a existência de motoristas cobre-turnos

| $mf_{ij}$ | $a_{ij}$ | Resultado | Significado                         |
|-----------|----------|-----------|-------------------------------------|
| 0         | 0        | CT        | Necessário um motorista cobre-turno |
| 1         | 0        | FC        | Folga coincidente                   |
| 0         | 1        | EN        | Expediente normal                   |
| 1         | 1        | FF        | Folga forçada                       |

Para ilustrar a utilização da regra da Tabela 4, considere, por exemplo, a primeira linha da matriz de folgas da Figura 5 (correspondente à escala 18) e a primeira linha da matriz de cobertura da primeira etapa. Os resultados destas comparações são mostrados na Figura 6.

|                                 |           |           |           |           |           |
|---------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $mf_{ij}$ ( $j = 1, \dots, 5$ ) | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         |
| $a_{ij}$ ( $j = 1, \dots, 5$ )  | 1         | 1         | 0         | 1         | 1         |
| <b>Resultado</b>                | <b>EN</b> | <b>EN</b> | <b>CT</b> | <b>EN</b> | <b>EN</b> |

Figura 6 – Necessidade de motoristas cobre-turno

Para cada uma das escalas definitivas, todos os padrões de folga estabelecidos na matriz de cobertura  $a_{ij}$  são considerados. O padrão de folga que corresponde à menor necessidade de motoristas cobre-turno é atribuído a esta escala. Em caso de empate, procura-se minimizar a quantidade de folgas forçadas. Este procedimento aplicado ao problema-exemplo resulta nas seguintes atribuições mostradas na Figura 7:

| Escalas | Dias do escalonamento |   |                |   |                | Padrão de folga |
|---------|-----------------------|---|----------------|---|----------------|-----------------|
|         | 1                     | 2 | 3              | 4 | 5              |                 |
| 18      | 1                     | 1 | 0 <sup>-</sup> | 1 | 1              | 2 × 1           |
| 29      | 1                     | 0 | 1              | 1 | 0              | 2 × 1           |
| 36      | 0                     | 1 | 1              | 1 | 1 <sup>+</sup> | 4 × 1           |
| 56      | 1                     | 1 | 1              | 0 | 1 <sup>-</sup> | 3 × 1           |
| 70      | 1 <sup>+</sup>        | 0 | 1              | 1 | 0              | 2 × 1           |

Figura 7 – Atribuição de padrões de folga às escalas definitivas



Cada par (escala, padrão de folga) da Figura 7 pode ser atribuído a um motorista. Nesta figura, símbolo ‘-’ indica a ocorrência de um motorista cobre-turno. Observe que será necessário um motorista cobre-turno no terceiro dia da escala 18 e no quinto dia da escala 56. No entanto, como esta necessidade ocorre em dias diferentes, há a necessidade de contratação de apenas um motorista cobre-turno. O símbolo ‘+’ indica uma folga forçada de um motorista, ou seja, este motorista não precisa trabalhar porque sua jornada já foi coberta pelo motorista de uma outra escala. Neste caso, serão necessários 5 motoristas regulares e 1 motorista cobre-turno.

### 5.5 - Atribuição dos pares de escalas aos motoristas

Deseja-se atribuir as escalas com os respectivos padrões de folga determinados na etapa anterior aos motoristas regulares da empresa. Este problema pode ser modelado como um problema de atribuição da seguinte forma:

$$\text{Min } z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (9)$$

$$\text{sujeito a: } \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (11)$$

$$c_{ij} \in Z^+, x_{ij} \in \{0,1\} \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n) \quad (12)$$

onde:  $n$  é o número de escalas, que corresponde também ao número de motoristas;  $c_{ij}$  ( $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$ ) é o grau de incompatibilidade entre o motorista  $i$  e a escala  $j$ ;  $x_{ij}$  ( $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$ ) é a variável de decisão tal que:  $x_{ij} = 1$ , se o motorista  $i$  está atribuído à escala  $j$  na solução final,  $x_{ij} = 0$ , caso contrário. Observe, neste modelo, que qualquer motorista pode, em princípio, ser atribuído a qualquer escala. Deseja-se, no entanto, uma atribuição de escalas com a menor incompatibilidade total.

Para o exemplo em questão, a matriz de incompatibilidade foi estabelecida como:

$$c = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 7 & 7 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



e , neste caso, a solução do modelo (9)-(12) corresponde à atribuição apresentada na Tabela 5.

Tabela 5 – Solução final do PEM

| Motorista | Escala atribuída |
|-----------|------------------|
| 1         | 70: E-B-B-D-E    |
| 2         | 29: B-A-C-C-B    |
| 3         | 36: C-A-B-A-A    |
| 4         | 18: A-B-D-E-B    |
| 5         | 56: D-E-B-B-A    |

Observe que para esta solução final do PEM, o grau de incompatibilidade total é igual a 5.

## 6. TESTES COMPUTACIONAIS

Alguns testes computacionais foram realizados visando verificar a eficácia e eficiência da abordagem proposta. Os experimentos computacionais realizados levaram em conta os dados reais de uma empresa de transporte interurbano brasileira de médio porte. Para esta empresa, a elaboração de escalas é feita manualmente. A título de comparação, para um horizonte de 42 dias, uma demanda diária média de 81 jornadas e o emprego de 11 padrões de folga, gasta-se cerca de 10 dias de trabalho de 1 pessoa, resultando em um número médio de 15 motoristas cobre-turnos.

Para os testes computacionais considerou-se, a partir dos dados reais desta empresa, uma instância com horizonte de 14 dias, demanda diária média de 14 jornadas e 11 padrões de folga. A solução desta instância pelo algoritmo proposto tem sido obtida em cerca de 10 segundos, resultando em apenas 1 motorista cobre-turno. Foi utilizado o otimizador ILOG CPLEX 9.1 em microcomputador com processador de 2,8 Ghz, 512 Mb de memória RAM.

Comparações com estudos feitos por outros pesquisadores nem sempre são possíveis, pois, a área, a formulação e a modelagem do problema podem ser muito diferentes. No entanto, em alguns casos, heurísticas propostas para uma área, por exemplo, abordagens propostas para a área de aviação (Kohl e Karisch, 2004), podem também ser empregadas para a área de transporte interurbano.

A título de comparação com a área de aviação pode-se citar, por exemplo, o estudo de Capanera e Gallo (2004). Neste estudo, o problema de escalonamento de pessoal para a área de aviação é formulado como um problema de fluxo e resolvido através de um otimizador



comercial usando Programação Linear. Algumas restrições do problema são inseridas durante a construção do grafo de fluxo. Nos testes realizados, os autores consideraram instâncias em que o número de membros da tripulação varia de 24 a 54, com período de planejamento fixo de 30 dias nos quais devem ser cobertas de 189 a 259 jornadas. Para os exemplares considerados a matriz de cobertura varia de 11229 linhas  $\times$  39552 colunas a 18993 linhas  $\times$  63825 colunas. O tempo de processamento para a solução variou de 192 segundos a 15 horas, sendo que em alguns experimentos não foi possível obter uma solução viável dentro do limite de tempo considerado (15 horas). Utilizou-se o otimizador ILOG CPLEX 7.0, um microcomputador com processador de 1,2 Ghz, 512 Mb de memória RAM.

Os testes computacionais realizados com a abordagem proposta sugerem que boas soluções possam ser obtidas rapidamente. Novos testes com exemplares de grandes dimensões deverão ser conduzidos para estabelecer os limites de aplicabilidade da heurística proposta e permitir uma comparação melhor com os resultados obtidos por outros trabalhos, ainda que de áreas distintas.

## 7. CONCLUSÃO

Neste trabalho discutiu-se uma abordagem de solução para o problema de escalonamento de motoristas para empresas de transporte coletivo interurbano. Trata-se de um problema complexo e de difícil solução devido à quantidade de variáveis e de restrições envolvidas e também devido à dificuldade de levar em conta todas as restrições operacionais e trabalhistas necessárias. A proposta apresentada leva em conta os dados de uma empresa típica da área e sua experiência na resolução manual do problema.

Seguindo a tendência indicada pela literatura, o problema foi dividido em subproblemas, os quais são resolvidos por algoritmos heurísticos ou formulados como modelos de Programação Inteira e resolvidos por otimizadores comerciais. Neste trabalho ilustrou-se a aplicação passo-a-passo da abordagem proposta considerando dados de um pequeno exemplar do problema. Uma instância real deste problema para uma empresa de médio porte pode compreender cerca de 25 padrões de folga, uma demanda em torno de 80 a 200 jornadas diárias e um período de escalonamento de 40 dias a 1 ano.

Espera-se com a abordagem proposta não só ajudar na solução de problemas de escalonamento em empresas de pequeno e médio portes, mas também contribuir para a





disseminação de técnicas de Otimização Combinatória entre estas empresas, devido ao fácil acesso aos otimizadores comerciais existentes.

### **Agradecimentos**

Os autores agradecem aos valiosos comentários e sugestões de um revisor anônimo. O segundo e terceiro autores agradecem ao CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelos apoios financeiros recebidos.

### **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

ABBINK, E.; WOUT, J.; HUISMAN, D. Solving Large Scale Crew Scheduling Problems by using Iterative Partitioning. **ATMOS 2007 - 7th Workshop on Algorithmic Approaches for Transportation Modeling, Optimization, and Systems**, 2007, p. 96-106.

AICKELIN, U.; WHITE, P. Building Better Nurse Scheduling Algorithms. **Annals of Operations Research**, 128, Special Issue on Staff Scheduling and Rostering, p. 159-177, 2004.

BURKE, E.; COWLING, P.; DE CAUSMAECKER, P; VENDEN BERGHE, G. A Memetic Approach to the Nurse Rostering Problem. **Applied Intelligence**, v. 15, n. 3, p. 199-214, 2001.

CAPPANERA, P.; GALLO, G. A multicommodity flow approach to the crew rostering problem. **Operations Research**, v. 52, n. 4, p. 583-596, July-August, 2004.

CAPRARA, A.; FISCHETTI, M.; GUIDA, P.; TOTH, P.; VIGO, D. Solution of Large Scale Railway Crew Planning Problems: The Italian Experience. N. Wilson (ed), Computer Aided Transit Scheduling, **Lecture Notes in Economical and Mathematical Systems**, v. 430, p. 1-18, Berlin:Springer, 1999.

CAPRARA, A.; TOTH, P.; VIGO, D ; FISCHETTI, M. Modeling and Solving the Crew Rostering Problem. **Operations Research**, v. 46, n. 6, p. 820-830, 1998.

EITZEN, G. **Integer Programming Methods for Solving Multi-Skilled Workforce Optimisation Problems**. Ph.D. Thesis, School of Mathematics, University of South Australia, 2002.

EITZEN, G.; MILLS, G.; PANTON, D. Multi-Skilled Workforce Optimisation. **Annals of Operations Research**, 127, Special Issue on Staff Scheduling and Rostering, p. 359-372, 2004.



EMDEN-WEINERT, T.; KOTAS, H.G.; SPEER, U. **DISSY – A Driver Scheduling System for Public Transport**. Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.33.7675>. Acessado em Agosto de 2002.

ERNST, A.T.; JIANG, H.; KRISHNAMOORTHY, M.; OWENS, B.; SIER, D. An Annotated Bibliography of Personnel Scheduling and Rostering. **Annals of Operations Research**, v. 127, p. 21-144, 2004b.

ERNST, A.T.; JIANG, H.; KRISHNAMOORTHY, M.; SIER, D. Staff scheduling and rostering: A review of applications, methods and models. **European Journal of Operational Research**, v. 153, p. 3-27, 2004a.

ESCLAPÉS, C. **Asignación de conductores a jornadas de trabajo en empresas de transporte colectivo**. Tesis doctora. Departament d'Estadística i Investigació Operativa, Universitat Politècnica de Catalunya, Julio 2000.

FAHLE, T.; BERTELS, S. **A Hybrid Setup for a Hybrid Scenario: Combining Heuristics for the Home Health Care Problem**. Working Paper, 2002.

KARP, R. **Reducibility among combinatorial problems**. Symposium on Mathematical Programming at the University of Wisconsin at Madison, Sep. 1972.

KOHL, N.; KARISCH, S.E. Airline Crew Rostering: Problem Types, Modeling, and Optimization. Kluwer Academic Publishers. **Annals of Operations Research**, 127, p. 223-257, 2004.

MASON, A.; NIELSEN, D. **PETRA: A Programmable Optimisation Engine and Toolbox for Personnel Rostering Applications**, 1999. Em: <http://www.esc.auckland.ac.nz/Mason>. Acessado em Abril de 2004.

MATEUS, G.; CASIMIRO, J. **Models and Algorithms for The Crew Scheduling Problem**. Working Paper, 2002.

OWENS, B. **Personnel scheduling using constraint logic programming**. Master's Thesis, Computer Science and Software Engineering, Monash University, Australia, 2001.

SHODI, M.S.; NORRIS, S.A. A flexible, fast and optimal modeling approach applied to crew rostering at London Underground. **Annals of Operations Research**, 127, p.259-281, 2004.

WOLSEY, L.A. **Integer Programming**. John Wiley and Sons, 1998.

Artigo recebido em 2007 e aprovado para publicação em 2008